Problema săptămânii 331

Louisa a scris pe tablă un număr natural care nu conţine cifra 0 şi are cel puţin două cifre diferite în scrierea sa în baza 10. Apoi, ea a scris pe tablă toate numere care se pot forma permutând cifrele numărului iniţial. În fine, ea a calculat cel mai mare divizor comun al tuturor numerelor scrise pe tablă (inclusiv numărul iniţial). Care este valoarea maximă pe care o poate obţine Louisa?

Katalin Abigél Kozma, KöMaL, 2022

Soluţie: Vom demonstra că valoarea maximă a celui mai mare divizor comun al numerelor scrise pe tablă este 63.
Fie $a > b$ două cifre ale numărului. Printre numerele scrise pe tablă se află unul care se termină în $\overline{ab}$ şi un altul care se termină în $\overline{ba}$ dar în rest are cifrele în aceeaşi ordine ca şi numărul care se termină în $\overline{ab}$. Dacă d cel mai mare divizor comun al numerelor de pe tablă, atunci d divide diferenţa celor două numere menţionate, adica d divide $\overline{ab} - \overline{ba}$, adică $d \mid 9(a-b)$. Cum $a - b \leq 9 - 1 = 8$, d poate fi cel mult 72 şi asta dacă singurele cifre ale numerelor de pe masă sunt 1 şi 9. Dar atunci numerele sunt impare şi nu este posibil ca 72 să fie cel mai mare divizor comun al lor. Cel mai mare divizor comun va fi în acest caz un divizor al lui 9.
Deducem aşadar că $d \leq 9 \cdot 7 = 63$. Cel mai mare divizor comun al numerelor de pe tablă ar putea fi 63 numai dacă singurele cifre scrise pe tablă sunt fie 1 şi 8, fie 2 şi 9. Cu cifre de 1 şi 8 putem obţine numere care să aibă cel mai mare divizor 63. Numerele trebuie să fie divizibile cu 9 şi cu 7. Pentru divizibilitatea cu 9 este suficient să folosim număr egal de cifre de 1 şi de 8, iar pentru divizibilitatea cu 7 să observăm că datorită congruenţei $8 \equiv 1 \pmod 7$, toate numere scrise pe tablă vor fi congruente cu $111\ldots1 \pmod 7$. Cum $7 \mid 111111$ (de exemplu din mica teoremă a lui Fermat: $7 \mid 10^6 - 1 = 999999$ şi $(7,9) = 1$ implică $7 \mid 111111$), rezultă că scriind pe tablă un număr format din trei cifre de 1 şi trei cifre de 8, toate numerele scrise pe tablă (sunt 20 de numere) vor fi divizibile cu 63.
În concluzie, valoarea maximă a celui mai mare divizor comun al numerelor de pe tablă este 63.

Am primit soluţie de la *Alexandru Ciobotea*.

Problem of the week no. 331

Louisa wrote down a natural number, not containing 0 but containing at least two different digits. Then she also listed all the numbers which can be formed by permuting the digits of the original number. What is the maximum of the greatest common divisor of all the numbers (including the original one)?

Katalin Abigél Kozma, KöMaL, 2022

Solution: We shall prove that the maximum valoue of the greatest common divisor of the numbers written by Louisa is 63.

Let $a > b$ be two of the digits of the number written initially. Consider two numbers that end one in $\overline{ab}$, the other in $\overline{ba}$ but which coincide otherwise. If d is the greatest common divisor of the numbers written by Louisa, the d divides the difference of the two numbers mentioned above, therefore d divides $\overline{ab} - \overline{ba}$, i.e. $d \mid 9(a-b)$. As $a - b \leq 9 - 1 = 8$, d can be at most 72, and this would only be possible if the only digits written by Louisa were 1 and 9. But in this case all Louisa's numbers are odd, so their greatest common divisor is not 72, but a divisor of 9.
It follows that $d \leq 9 \cdot 7 = 63$. The greatest common divisor of Louisa's numbers could be 63 only in two cases: she only wrote digits 1 and 8, or, the second case, she only wrote digits and 9. Next we prove that, at least in the first case, it is possible for Louisa to write numbers whose g.c.d. is 63. The numbers must be multiples of both 9 and 7. Divisibility by 9 is easy to achieve by choosing an equal amount of digits 1 and 8. For the divisibility by 7, note that because of the congruence $8 \equiv 1 \pmod 7$, all of Louisa's numbers are congruent to $111\ldots1 \pmod 7$. As $7 \mid 111111$ (for e.g. from Fermat's Little Theorem we get $7 \mid 10^6 - 1 = 999999$ and then $(7, 9) = 1$ leads to $7 \mid 111111$), it follows that by initially writing a number consisting of three 1's and three 8's, Louisa can obtain a g.c.d. of 63.
In conclusion, the maximum value of the g.c.d. of Louisa's numbers is 63.