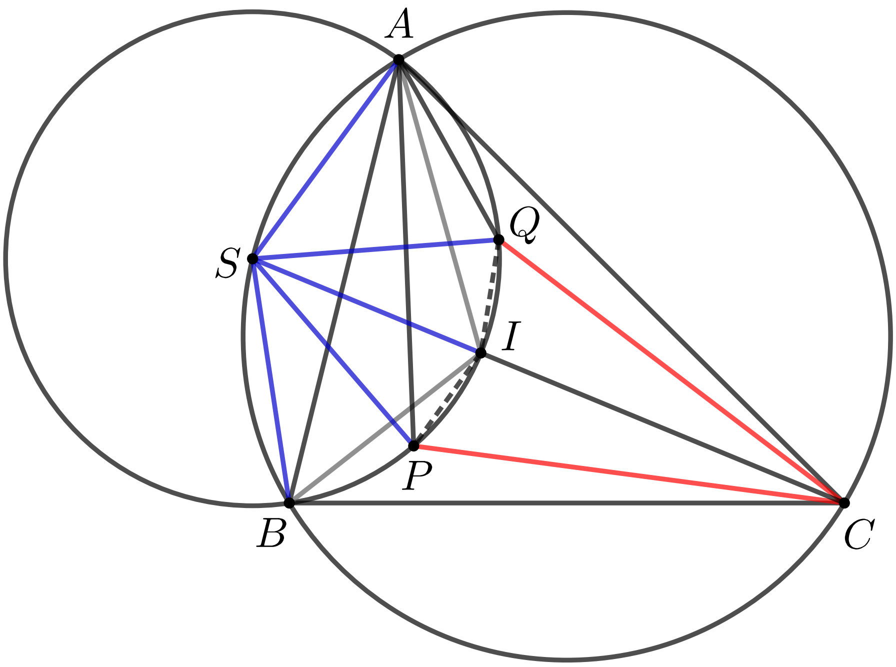
Problema săptămânii 329

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar P un punct interior triunghiului ABC şi situat pe cercul circumscris triunghiului ABI. Simetricul dreptei AP faţă de dreapta AI intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABI într-un punct Q diferit de A. Arătaţi că $CP = CQ$.

Szilveszter Kocsis, KöMaL, pb. B.5268, 2022

Soluţia 1: Fie S al doilea punct de intersecţie dintre dreapta CI şi cercul circumscris triunghiului ABC. Din Incenter-excenter Lemma (vezi aici) rezultă că S este centrul cercului circumscris triunghiului ABI. Atunci triunghiurile SPI şi SQI sunt congruente (LLL). deci triunghiurile SPC şi SQC sunt şi ele congruente (LUL). Concluzia se impune.



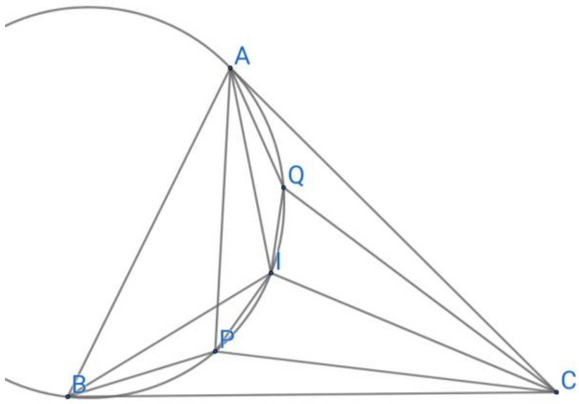
Remarci: Afirmaţia din enunţ rămâne valabilă şi dacă P se află în exteriorul triunghiului ABI, dar unele dintre argumente trebuie modificate.

Punctul Q este de fapt conjugatul izogonal al punctului P (a se vedea Mihai Miculiţa – Patrulatere inscriptibile, pag 8-10).

În continuare vă prezentăm soluţia lui *Titu Zvonaru* în care nu este folosit explicit punctul S:

<u>Soluție</u>: Presupunem că punctul P este situat pe arcul mic BI al cercului circumscris triunghiului ABI. În acest cerc avem IP = IQ; cum latura CI este comună și vrem să arătăm că CP = CQ, observăm că trebuie să demonstrăm că triunghiurile CPI și CQI sunt congruente.

Folosind patrulaterele inscriptibile ABPI și AQIB, obținem



$<CIP =< BIC -< BIP = 90^\circ + \frac{A}{2} -< BAP =$

$= 90^\circ + \frac{A}{2} - \left(\frac{A}{2} -< PAI\right) = 90^\circ +< PAI$

$< CIQ =< CIA -< QIA = 90^\circ + \frac{B}{2} -< ABQ =$

$= 90^\circ + \frac{B}{2} -< ABI +< QBI = 90^\circ +< QAI =$

$= 90^\circ +< PAI.$

Rezultă că triunghiurile CPI și CQI sunt congruente, deci CP = CQ.

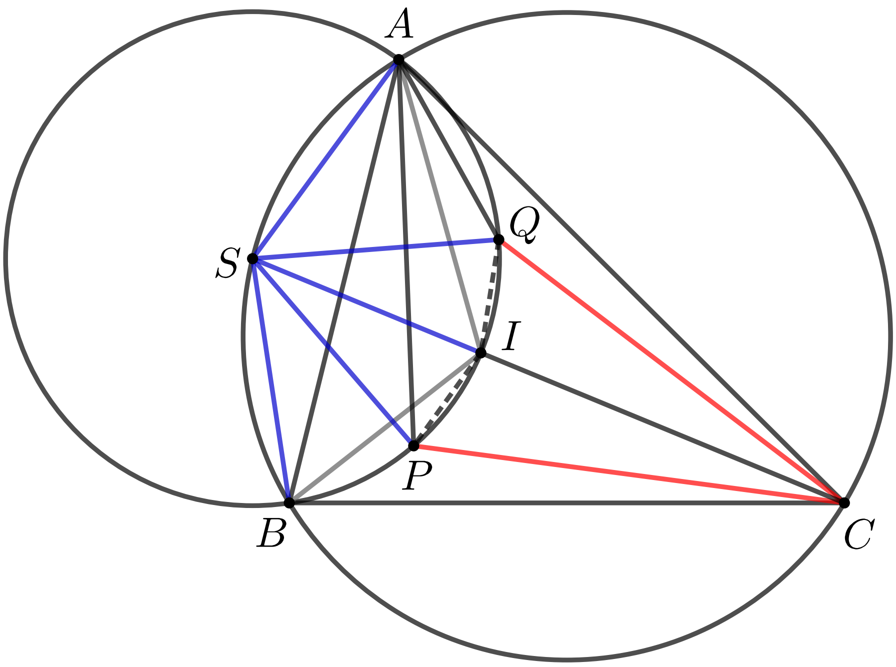
Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Alexandru Ciobotea, Adrian Zanca, Mihai Miculiţa* şi *Alberto Radu.*

Problem of the week no. 329

Let I be the incenter of triangle ABC. Let P denote an arbitrary interior point of the triangle situated on the circumcircle of triangle ABI. The reflection of line AP about line AI intersects the circumcircle of triangle ABI at a point Q different from A. Prove that $CP = CQ$.

Szilveszter Kocsis, KöMaL, pb. B.5268, 2022

Solution: Let S be the second intersection point of line CI with the circumcircle of triangle ABC. From the Incenter-excenter Lemma (see here), it follows that S is the circumcenter of triangle ABI. Triangles SPI and SQI are equal (SSS), therefore triangles SPC and SQC are also equal (SAS). The conclusion follows readily.



Remarks: The statement stays true even for points P situated in the exterior of the triangle ABC, but some arguments need to be adapted.

Point Q is actually the isogonal conjugate of point P.