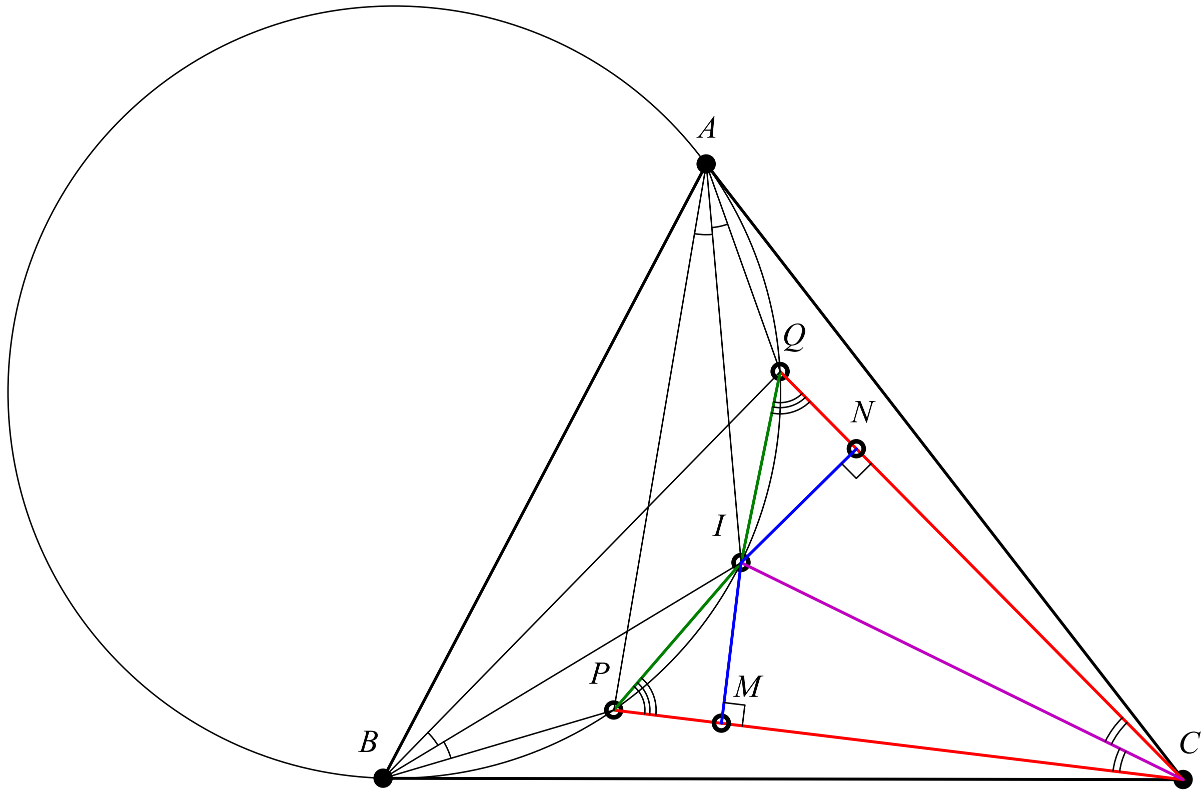
Problema Săptămânii 329

Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar P un punct din interiorul triunghiului ABC şi situat pe cercul circumscris triunghiului ABI. Simetrica dreptei AP faţă de dreapta AI intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABI într-un punct $Q \neq A$.

Arătaţi că $CP = CQ$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Din (v.Fig.):

$$\left.\begin{array}{r} ABIQ - inscriptibil \Rightarrow \widehat{QBI} \equiv \underline{\widehat{IAQ}} \\ AQ = S_{AI}(AP)(ip) \Rightarrow \underline{\widehat{IAQ}} \equiv \underline{\underline{\widehat{IAP}}}\,(1) \\ ABPI - inscriptibil \Rightarrow \underline{\underline{\widehat{IAP}}} \equiv \widehat{IBP} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{QBI} \equiv \widehat{IBP} \Leftrightarrow BQ = S_{AI}(BP); \quad (2)$$

iar din: $\widehat{IAQ} \equiv \widehat{IAP}\,(1) \Rightarrow \widehat{IQ} \equiv \widehat{IP} \Leftrightarrow [IP] \equiv [IQ]. \quad (3)$

Ţinând acum seama de teorema ([1]) care spune că: Dacă $P -$ este un punct din planul triunghiului ABC, atunci simetricele dreptelor AP, BP şi $CP -$ faţă de bisectoarele unghiurilor $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ şi respectiv $\widehat{BCA}$ (adică faţă de dreptele AI, BI şi respectiv CI), sunt trei drepte concurente; aşa că din:

$$\left.\begin{array}{r} AQ = S_{AI}(AP)(ip) \\ BQ = S_{BI}(BP)\,(2) \end{array}\right\} \Rightarrow CQ = S_{CI}(CP) \Leftrightarrow \widehat{QCI} \equiv \widehat{PCI}. \quad (4)$$

Notând acum cu $M := pr_{PC}(I)$ şi cu $N := pr_{CQ}(I)$, din:

---

[1]).v. **Teorema 17** (pag.100) din traducerea mea în lb. română a cărtii lui **Efremov: NOUA GEOMETRIE a TRIUNGHIULUI (Odesa, 1902),** aparută la **editura GIL în anul 2010**.

$$\left.\begin{array}{r} IM \perp MC, IN \perp CN \\ [IC]=[IC] \\ \widehat{MCI} \equiv \widehat{NCI}\,(4) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MCI \equiv \Delta NCI\,(I.U.) \Rightarrow [IM] \equiv [IN] \quad (5)$$

si din:

$$\left.\begin{array}{r} IM \perp MC, IN \perp CN \\ [IM]=[IN](5) \\ [IP] \equiv [IQ](3) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MIP \equiv \Delta NCQ\,(I.C.) \Rightarrow \widehat{IPC} \equiv \widehat{IQC}. \quad (6)$$

În fine, din:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{PCI} \equiv \widehat{QCI}\ (4) \\ \widehat{IPC} \equiv \widehat{IQC}\ (6) \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PCI \sim \Delta QCI \Rightarrow \boxed{\frac{|CP|}{|CQ|}} = \frac{|PI|}{|QI|} = \frac{|IC|}{|IC|} = \boxed{1} \Rightarrow \boxed{|CP|=|CQ|}. \blacksquare$$