Liceul Teoretic Internaţional de Informatică Bucureşti

Societatea de Ştiinte Matematice din România

Concursul Naţional "Stelele Matematicii" - Etapa Naţională, 10 decembrie 2022

JUNIORI

Problema 1. Determinaţi numerele naturale n cu proprietatea că există a şi b numere întregi astfel încât $a+2^b=n^{2022}$ şi $a^2+4^b=n^{2023}$.

Problema 2. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$ şi numerele reale $a_1,a_2,\ldots,a_n$ astfel încât

$$a_k^3=a_{k+1}^2+a_{k+2}^2+a_{k+3}^2$$

pentru orice $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ – indicii fiind consideraţi modulo n: $a_{n+1}=a_1$ şi $a_{n+2}=a_2$.

Arătaţi că $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Problema 3. Un *domino* este un dreptunghi format din două pătrate unitate care au o latură comună. Un pătrat 6×6 este pavat cu 18 dominouri (acestea au interioarele disjuncte două câte două şi acoperă tot pătratul). Arătaţi că există o dreaptă care traversează interiorul pătratului, fără să traverseze interiorul vreunui domino.

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater convex pentru care există un punct P în interiorul acestuia astfel încât $\angle APB+\angle CPD=\angle APD+\angle BPC$, $\angle PAD+\angle PCD=\angle PAB+\angle PCB$ şi $\angle PDC+\angle PBC=\angle PDA+\angle PBA$. Demonstraţi că patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.

Timp de lucru: 4 ore