Problema săptămânii 328

Se aleg 50 de numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 99\}$ astfel încât nicicare două dintre numerele alese să nu aibă suma 99 sau 100. Arătaţi că numerele alese trebuie să fie $50, 51, \ldots, 99$.

Olimpiada Sankt Petersburg, 1996

Soluţia 1: Scriem numerele din mulţimea dată în următoarea ordine:

$$99, 1, 98, 2, 97, 3, \ldots, 52, 48, 51, 49, 50.$$

Oricare două numere vecine au suma fie 99, fie 100, deci din lista dată nu se pot alege nicicare două numere vecine. Singurul mod de a alege 50 de numere nevecine este să alegem numerele de pe poziţiile impare, ori acestea sunt tocmai numerele $99, 98, \ldots, 50$.

Soluţia 2: (*Titu Zvonaru*)
Mulțimea $A = \{1, 2, \ldots, 99\}$ poate fi scrisă

$$A = \{1, 98\} \cup \{2, 97\} \cup \{3, 96\} \cup \ldots \cup \{48, 51\} \cup \{49, 50\} \cup \{99\}, \quad (1)$$

dar şi

$$A = \{1, 99\} \cup \{2, 98\} \cup \{3, 97\} \cup \ldots \cup \{48, 52\} \cup \{49, 51\} \cup \{50\}. \quad (2)$$

Deoarece dorim să alegem 50 de numere, deducem că din fiecare dintre mulțimile din (1) sau (2) trebuie să alegem exact un element. Rezultă că alegem obligatoriu numerele 50 și 99. Acum din (2) avem 1 este neales, apoi din (1) rezultă că 98 trebuie ales. Din aproape în aproape, folosind alternativ (2) și (1), obținem: 2 neales, 97 ales, 3 neales, 96 ales etc. Alegerea numerelor 50, 51, 52, ..., 98, 99 îndeplinește condiția din enunț.

Am primit soluţii de la *Titu Zvonaru* şi *Alberto Radu*.

Problem of the week no. 328

Fifty numbers are chosen from the set $\{1, 2, \ldots, 99\}$, no two of which sum to 99 or 100. Prove that the chosen numbers must be $50, 51, \ldots, 99$.

Sankt Petersburg Mathematical Olympiad, 1996

Solution 1: We write the given numbers as a list, in the following order:

$$99, 1, 98, 2, 97, 3, \ldots, 52, 48, 51, 49, 50.$$

The sum of any two neighboring numbers is either 99, or 100, therefore one can not choose any two neighboring numbers. The only way of choosing 50 numbers from the list without choosing any two that are neighbors is to choose the numbers in odd positions on the list, namely $99, 98, \ldots, 50$.

Solution 2: (*Titu Zvonaru*)
Set $A = \{1, 2, \ldots, 99\}$ can be written

$$A = \{1, 98\} \cup \{2, 97\} \cup \{3, 96\} \cup \ldots \cup \{48, 51\} \cup \{49, 50\} \cup \{99\}, \quad (1)$$

but also

$$A = \{1, 99\} \cup \{2, 98\} \cup \{3, 97\} \cup \ldots \cup \{48, 52\} \cup \{49, 51\} \cup \{50\}. \quad (2)$$

As we need to choose 50 numbers, we need to pick exactly one number of each of the sets from (1) and (2). It follows that we must choose numbers 50 and 99. Now, from (2) we get that 1 is not chosen, then from (1) we get that 98 must be chosen. Successively, by alternately using (2) and (1), we get: 2 not chosen, 97 chosen, 3 not chosen, 96 chosen, etc. The choice of the numbers 50, 51, 52, $\ldots$, 98, 99 does satisfy the conditions of the statement.