Problema săptămânii 327

Determinaţi toate perechile (a, b) de numere naturale nenule cu proprietatea că $2^a + 1$ este divizibil cu $2^b - 1$.

Soluţie: (*Titu Zvonaru*)
Observăm imediat că perechile $(k, 1)$ sunt soluții, unde k este un număr natural nenul. Presupunem că $b > 1$. Conform teoremei împărțirii cu rest, avem $a = bn + m$, unde m, n sunt numere naturale cu $m < b$. Atunci

$$2^a + 1 = 2^m \cdot 2^{nb} + 1 = 2^m(2^b - 1 + 1)^n + 1 = M(2^b - 1) + 2^m + 1.$$

O condiție necesară (nu și suficientă) pentru ca $2^a + 1$ să se dividă cu $2^b - 1$ este $2^m + 1 \geq 2^b - 1$, adică $2^{m-1} + 1 \geq 2^{b-1}$. Pe de altă parte, avem $m < b \Longrightarrow 2^{m-1} < 2^{b-1} \Longrightarrow 2^{m-1} \leq 2^{b-1} - 1$. Rezultă că $2^{m-1} + 1 = 2^{b-1}$; cum $b > 1$, din motive de paritate deducem că $m = 1$, $b = 2$. Deoarece $2^{2n+1} + 1 = 2(3+1)^n + 1 = M3$, obținem soluțiile $(2k + 1, 2)$, cu k număr natural.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Alexandru Ciobotea* şi *Alberto Radu.*

Problem of the week no. 327

Determine the pairs of positive integers (a, b) such that $2^b - 1$ divides $2^a + 1$.

Solution: (*Titu Zvonaru*)
We immediately notice that all pairs $(k, 1)$ are solution, where k is a positive integer. Assume $b > 1$. We write $a = bn + m$, where m, n are non-negative integers such that $m < b$. It follows that

$$2^a + 1 = 2^m \cdot 2^{nb} + 1 = 2^m(2^b - 1 + 1)^n + 1 = M(2^b - 1) + 2^m + 1.$$

A necessary (but not sufficient) condition for $2^a + 1$ to be divisible by $2^b - 1$ is $2^m + 1 \geq 2^b - 1$, i.e. $2^{m-1} + 1 \geq 2^{b-1}$. On the other hand, we have $m < b \Longrightarrow 2^{m-1} < 2^{b-1} \Longrightarrow 2^{m-1} \leq 2^{b-1} - 1$. It follows that $2^{m-1} + 1 = 2^{b-1}$; as $b > 1$, from parity reasons we find that $m = 1$, $b = 2$. As $2^{2n+1} + 1 = 2(3 + 1)^n + 1 = M3$, we obtain solutions $(2k + 1, 2)$, where k is a non-negative integer.