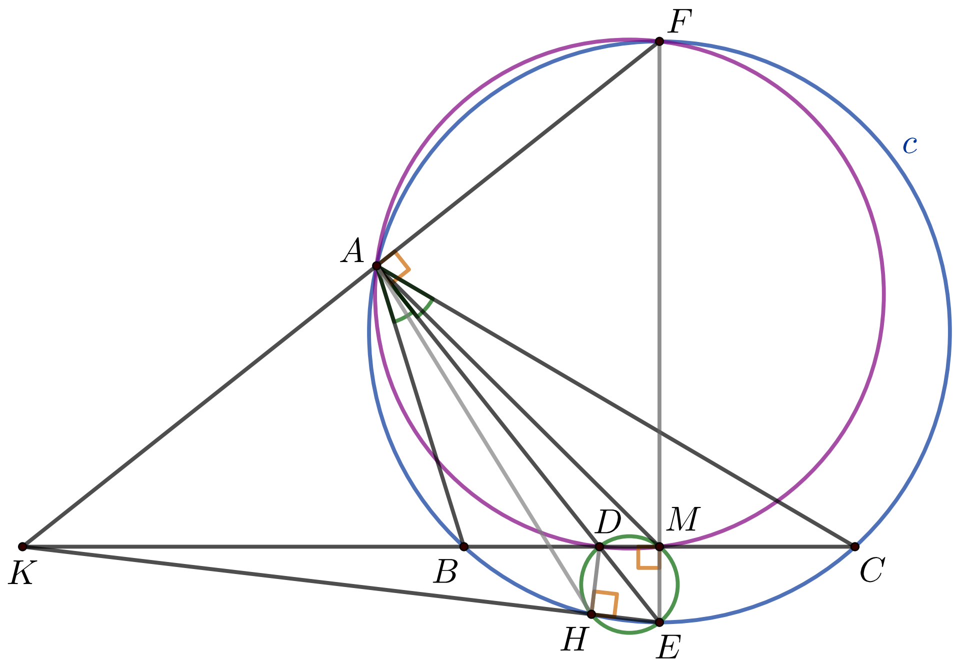
Problema săptămânii 325

Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle ABC) > 90°$ și fie c cercul său circumscris. Bisectoarea interioară a unghiului $\angle BAC$ intersectează din nou cercul c în punctul E și dreapta BC în punctul D. Cercul de diametru $[DE]$ intersectează din nou cercul c în punctul H.
Dacă dreapta EH intersectează dreapta BC în punctul K, demonstrați că:
a) punctele K, H, D și A sunt conciclice;
b) dreapta AH trece prin punctul de intersecție a tangentelor în B şi C la cercul c.

baraj Grecia, 2022

Soluţie: a) Mediatoarea laturii $[BC]$ intersectează cercul c în punctele diametral opuse E şi F şi latura $[BC]$ în punctul M. Cum $\sphericalangle EAF = \sphericalangle DMF = 90°$, patrulaterul $DAFM$ este inscriptibil. Axele radicale ale cercurilor circumscrise patrulaterelor $DAFM$, $EHDM$ şi $ABEF$ sunt dreptele DM, AF şi HE. Acestea sunt paralele sau concurente în centrul radical al celor trei cercuri. Cum DM şi HE se taie în punctul K, acesta este centrul radical al celor trei cercuri, deci $K \in AF$. Acum se vede uşor că patrulaterul $ADHK$ este inscriptibil, având două unghiuri opuse drepte.
b) Triunghiul AMH este triunghiul ortic al triunghiului EKF şi se ştie că înălţimile unui triunghi sunt bisectoare pentru triunghiul său ortic. Aşadar, $\sphericalangle MAD = \sphericalangle HAD$, adică $(AH$ este simetricul medianei $(AM$ faţă de bisectoarea $(AD$, ceea ce arată că dreapta AH este dreapta suport a simedianei din A. Se ştie că simediana din A trece prin punctul de intersecţie a tangentelor în B şi C la cercul circumscris c.



Remarcă: Deoarece D este ortocentrul triunghiului EFK, rezultă şi că $F \in DH$.

Problem of the week no. 325

Let ABC be a triangle with $m(\sphericalangle ABC) > 90°$ and let c be its circumcircle. The bisector of angle $\angle BAC$ meets the circle c again at point E and line BC at point D. The circle of diameter $[DE]$ intersects again circle c at H.
If EH intersects line BC at K, prove that:
a) points K, H, D and A are concyclic;
b) line AH passes through the intersection point of the tangent line drawn at B and C to the circle c.

TST Greece, 2022

Solution: a) The perpendicular bisector of $[BC]$ meets the circle c at diametrically opposite points E and F, and side $[BC]$ at point M. As $\sphericalangle EAF = \sphericalangle DMF = 90°$, the quadrilateral $DAFM$ is cyclic. The radical axis of the circumcircles of quadrilaterals $DAFM$, $EHDM$ and $ABEF$ are lines DM, AF and HE. This can be either parallel or concurrent, but as DM and HE intersect at K, they must be concurrent in the radical center of the three circles. It follows that $K \in AF$. Now it is easy to see that, having two opposite right angles, quadrilateral $ADHK$ is cyclic.
b) Triangle AMH is the orthic triangle of triangle EKF and it is well known that the altitudes of a triangle are angle bisectors for its orthic triangle. Thus, $\sphericalangle MAD = \sphericalangle HAD$, i.e. $(AH$ is the reflection of the median $(AM$ into the angle bisector $(AD$, which makes AH the line containing the symmedian from A. It is known that this line passes through the intersection point of the tangents at B and C to the circumcircle c.