Problema săptămânii 321 (3-9 octombrie 2022):

În triunghiul ABC punctul M – este mijlocul laturii $[AB]$, I – este centrul cercului înscris; iar W – este punctul de intersecţie al bisectoarei $(AI$, cu cercul circumscris triunghiului ABC.

Dacă $m\left(\widehat{BIM}\right)=90^0$, arătaţi că: *a*). $|AI|=2\cdot|IW|$, *b*). $|AB|+|AC|=3\cdot|BC|$.

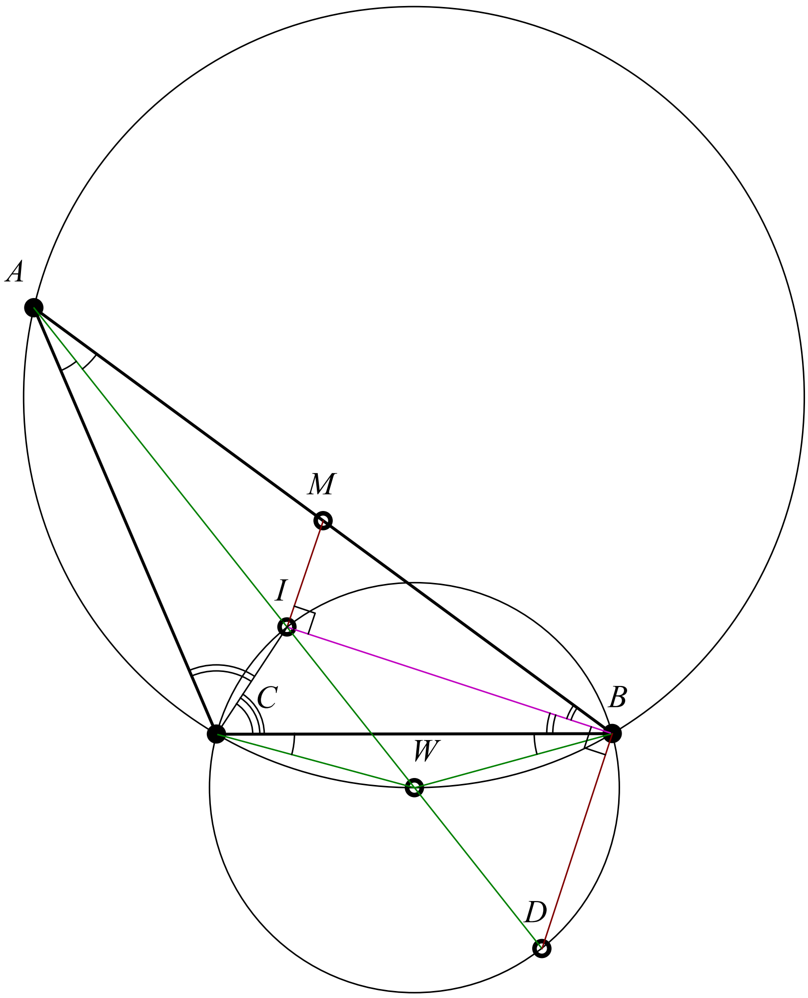

Fig.1.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):

***a*).** Punctul I – fiind centrul cercului înscris al triunghiului ABC, avem (v.Fig.1):

$$m\left(\widehat{IAB}\right)=m\left(\widehat{IAC}\right)=\alpha,\ m\left(\widehat{IBA}\right)=m\left(\widehat{IBC}\right)=\beta,\ m\left(\widehat{ICA}\right)=m\left(\widehat{ICB}\right)=\gamma;\quad (1)$$

şi din faptul că: $\widehat{WAB}\equiv\widehat{WAC}\Rightarrow \overset{\frown}{WB}\equiv\overset{\frown}{WC}\Rightarrow[WB]\equiv[WC]$. (2)

Pe de altă parte, din faptul că: $ACWB-inscriptibil\Rightarrow\begin{cases} m\left(\widehat{WBC}\right)=m\left(\widehat{IAC}\right)\overset{(1)}{=}\alpha; & (3)\\ m\left(\widehat{WCB}\right)=m\left(\widehat{IAB}\right)\overset{(1)}{=}\alpha. & (4)\end{cases}$

Întrucât $\widehat{WIC}$ – este un unghi exterior al $\Delta AIC\Rightarrow m\left(\widehat{WIC}\right)=m\left(\widehat{IAC}\right)+m\left(\widehat{ICA}\right)\overset{(1)}{=}\alpha+\gamma$ (5)

$$\text{şi } m\left(\widehat{WCI}\right)=m\left(\widehat{WBC}\right)+m\left(\widehat{ICB}\right)\overset{(3),(1)}{=}\alpha+\beta;\quad (6)$$

iar din relaţiile (5) şi (6), rezultă acum, că: $\widehat{WIC}\equiv\widehat{WCI}\Rightarrow[WC]\equiv[WI]$. (7)

Din relaţiile (2) şi (7) $\Rightarrow [WB]\equiv[WC]\equiv[WI]$ (8) $\Rightarrow$ că punctul $W-$ este centrul cercului circumscris ΔIBC şi notând acum cu $D-$ punctul diametral opus al punctului I, în cercul circumscris ΔIBC, obţinem că: $|WI|=|WD| \Rightarrow |ID|=2\cdot|IW|$ (9) şi $m\left(\widehat{IBD}\right)=90^0$. (10)

În fine, din:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} m\left(\widehat{BIM}\right)=90^0\,(ip)\Rightarrow IM\perp IB \\ m\left(\widehat{IBD}\right)=90^0(9)\Rightarrow BD\perp IB\end{array}\right\}\Rightarrow IM \,||\, BD \\ [MA]\equiv[MB](ip)\end{array}\right\}\Rightarrow [MI]-\text{este linie mijlocie a } \Delta ABD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |IA|=|ID|\overset{(9)}{=}2\cdot|IW| \Rightarrow \boxed{|IA|=2\cdot|IW|}.\ \blacksquare$$

***b*).** Din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r}|IA|=2\cdot|IW|(a)\Rightarrow|AW|=|IA|+|IW|=2\cdot|IW|+|IW|=3\cdot|IW|\Rightarrow|IW|=\dfrac{|AW|}{3} \\ |WB|=|WC|=|IW|(8)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow |WB|=|WC|=|IW|=\frac{|AW|}{3}. \quad (11)$$

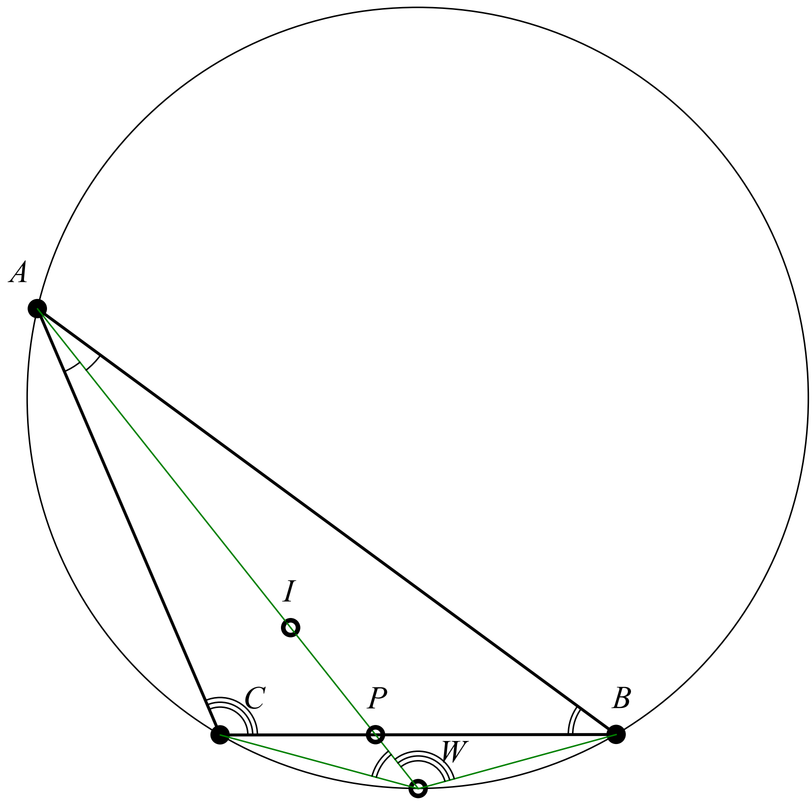

Fig.2.

Pe de altă parte, din faptul că (v.Fig.2): $ABWC-inscriptibil \Rightarrow \begin{cases}\widehat{AWC}\equiv\widehat{ABE} & (12)\\ \widehat{ACE}\equiv\widehat{AWB} & (13)\end{cases}$

şi atunci din:

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{AWC} \equiv \widehat{ABE}\ (12) \\ \widehat{WAC} \equiv \widehat{BAE}\,(ip)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AWC \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{|AW|}{|AB|} = \frac{|CW|}{|BE|} \Rightarrow |AB| \cdot |CW| = |AW| \cdot |BE|$$

$$\left.\begin{array}{r}\widehat{ACE} \equiv \widehat{AWB}\ (13) \\ \widehat{EAC} \equiv \widehat{BAW}\,(ip)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACE \sim \Delta AWB \Rightarrow \frac{|AC|}{|AW|} = \frac{|CE|}{|WB|} \Rightarrow |AC| \cdot |WB| = |AW| \cdot |CE| \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB| \cdot |CW| + |AC| \cdot |WB| = |AW| \cdot |BE| + |AW| \cdot |CE| = |AW| \cdot \left(|BE| + |CE|\right) = |AW| \cdot |BC| \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow |AB| \cdot |CW| + |AC| \cdot |WB| = |AW| \cdot |BC| \\ |WB| = |WC| = \dfrac{|AW|}{3}\ (11)\end{array}\right\} \Rightarrow |AB| \cdot \frac{|AW|}{3} + |AC| \cdot \frac{|AW|}{3} = |AW| \cdot |BC| \Bigg| \cdot \frac{3}{|AW|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|}. \blacksquare\blacksquare$$