Problema săptămânii 324

Fie $n > 1$. Pe $2n$ dintre pătrăţelele unei table de şah $n \times n$ se aşază $2n$ pioni. Arătaţi că se pot întotdeauna alege patru dintre ei care să fie vârfurile unui paralelogram.
Arătaţi că se pot plasa $2n-1$ pioni pe tablă astfel încât nicicare patru dintre ei să nu fie vârfurile unui paralelogram.
Soluţie:
Vom demonstra că dacă pe tablă se plasează $2n$ pioni, se va forma un paralelogram care are două laturi verticale. Ne uităm la acele coloane care au cel puţin 2 pioni. Dacă sunt m coloane cu cel puţin doi pioni, pe celelalte $n-m$ coloane avem în total cel mult $n-m$ pioni, deci pe cele m coloane care au minim doi pioni sunt în total $N \geq 2n-(n-m) = n+m$ pioni. Pe fiecare asemenea coloană ne uităm la pionul aflat cel mai sus pe respectiva coloană şi la distanţele de la ceilalţi pioni ai coloanei la pionul aflat cel mai sus. Aşadar, dacă pe o coloană se află $k > 1$ pioni, ne uităm la $k-1$ distanţe, cu una mai puţin decât numărul de pioni. Pe ansamblul celor m coloane cu minim doi pioni pe ele, ne uităm la $N-m \geq (n+m)-m = n$ distanţe. Dar aceste distanţe aparţin mulţimii $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Din principiul cutiei, există cel puţin două distanţe care sunt egale. Ele nu se pot afla pe aceeaşi coloană, deci pionii care le determină sunt vârfurile unui paralelogram.

Pe tablă se pot plasa $2n-1$ pioni astfel încât nicicare patru să nu fie vârfurile unui paralelogram: plasăm n pioni pe una din diagonale şi $n-1$ pioni pe cele $n-1$ pătrăţele încă neocupate de pe prima linie. Nu putem lua 3 sau 4 pioni de pe aceeaşi dreaptă, iar dacă luăm câte doi de pe diagonală şi prima linie, dreptele suport se intersectează pe prelungirile laturile, ceea ce nu se întâmplă în cazul unui paralelogram, deci punctele alese nu sunt vârfurile unui paralelogram.

Problem of the week no. 324

For $n > 1$, let $2n$ pawns be placed at the centers of $2n$ squares of an $n \times n$ chessboard. Show that it is always possible to choose four pawns that are vertices of a parallelogram.
Prove that if $2n$ is replaced by $2n-1$, the statement is no longer true.

Solution:
First, we prove that if we put $2n$ pawns on the board, there is a parallelogram whose vertices are four of the pawns.
We look at the columns that have at least two pawns on them. If there are m such columns, the remaining $n-m$ columns have in total at most $n-m$ pawns on them, which leaves $N \geq 2n-(n-m) = n+m$ pawns on the m columns that have at least two pawns. For each of these m columns we look at the topmost pawn and record the distances from the topmost pawn of the column to each of the remaining pawns of that column. On a column which contains k pawns, we record $k-1$ (distinct) distances. In total, on these m columns that have at least two pawns (at least $n+m$ in total), we record $N-m \geq n$ distances. These distances belong to the set $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. From the Pigeonhole Principle it follows that at least two such

distances must be equal. Two equal distances must appear on distinct columns, so the pawns that determine these two equal distances are the vertices of a parallelogram.

We can place $2n-1$ pawns on the board such that no four are the vertices of a parallelogram. Put n pawns on squares of one of the diagonal and $n-1$ more squares on the remaining squares of the first line. If we consider four pawns, they can not form a parallelogram. As a parallelogram does not have 3 collinear vertices, we must take two pawns, say A and B on the diagonal, and two other points, say C and D on the first line. But then $AB \cap CD$ is on $[AB]$ produced, which does not happen in case of a parallelogram, so the chosen pawns are not vertices of a parallelogram.