Problema săptămânii 323

Determinaţi toate perechile (x, y) de numere naturale nenule pentru care $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ este un număr întreg care divide 1995.

Concurs Bulgaria, 1995

Soluţie: Dacă perechea (x, y) are proprietatea din enunţ atunci şi (y, x) o are, deci putem să ne limităm la a căuta perechile cu $x > y$. Atunci $x^2 + y^2 = k(x - y)$, cu $k > 0$, $k \mid 1995$. Cum $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, iar 3, 7 şi 19 sunt numere prime congruente cu 3 modulo 4, dacă vreunul din aceste numere divide k, el divide şi $x^2 + y^2$. Dar ştim că dacă un număr prim $p \equiv 3 \pmod 4$ divide o sumă de două pătrate el divide fiecare pătrat, deci în acest caz împărţind cu p^2 ajungem la o ecuaţie de tipul $x_0^2 + y_0^2 = k_0(x_0 - y_0)$, unde k_0 nu mai este divizibil cu p. Împărţind eventual cu 3^2, 7^2 şi 19^2 ajungem la $x_0^2 + y_0^2 = k_0(x_0 - y_0)$, unde $k_0 \mid 5$. Cum $k_0 = 1$ nu convine (căci $x_0^2 + y_0^2 > x_0^2 \geq x_0 > x_0 - y_0$), deducem că $k_0 = 5$. Ecuaţia $x_0^2 + y_0^2 = 5(x_0 - y_0)$ se scrie echivalent $(2x_0 - 5)^2 + (2y_0 + 5)^2 = 50$, cu soluţiile $(2, 1)$ şi $(3, 1)$. Astfel, perechile căutate sunt perechile $(2t, t)$, $(3t, t)$, $(t, 2t)$ şi $(t, 3t)$, unde t este un divizor natural oarecare al lui $3 \cdot 7 \cdot 19 = 399$.

Problem of the week no. 323

Determine all pairs (x, y) of positive integers such that $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ is an integer that divides 1995.

Bulgarian Contest, 1995

Solution: If the pair (x, y) satisfies the condition above, then so does (y, x), therefore we can limit our search to pairs with $x > y$. In this case, $x^2 + y^2 = k(x - y)$, with $k > 0$, $k \mid 1995$. As $1995 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19$, and 3, 7, 19 are prime numbers congruent to 3 modulo 4, if one of these numbers divides k, it will also divide $x^2 + y^2$. It is well known that if a prime $p \equiv 3 \pmod 4$ divides a sum of two squares then it divides each square. Dividing if necessary by 3^2, 7^2 and 19^2 we get to $x_0^2 + y_0^2 = k_0(x_0 - y_0)$, where $k_0 \mid 5$. As $k_0 = 1$ does not work ($x_0^2 + y_0^2 > x_0^2 \geq x_0 > x_0 - y_0$), it follows that $k_0 = 5$. The equation $x_0^2 + y_0^2 = 5(x_0 - y_0)$ can be written $(2x_0 - 5)^2 + (2y_0 + 5)^2 = 50$, and has solutions $(2, 1)$ and $(3, 1)$. Thus, the pairs that satisfy the condition in the statement are $(2t, t)$, $(3t, t)$, $(t, 2t)$ and $(t, 3t)$, where t is any positive divisor of $3 \cdot 7 \cdot 19 = 399$.