Problema săptămânii 322

Dacă x, y, z sunt numere reale astfel încât $x^2+y^2+z^2=2$, arătaţi că $x+y+z \leq xyz+2$.

ShortList OIM, 1987

Soluţia 1: (*Chan Ming Chu*)
Să tratăm mai întâi cazul în care nu toate numerele sunt pozitive.
Să presupunem că $z \leq 0$. Atunci $2+xyz-x-y-z=(2-x-y)-(1-xy)z \geq 0$ deoarece $x+y \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \leq 2$ şi $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2} \leq 1$.
În acest caz avem egalitate dacă şi numai dacă $x=y=1$ şi $z=0$.
În continuare presupunem $0 < x \leq y \leq y \leq z$. (Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune această ordonare a variabilelor.)
• Dacă $z \leq 1$, atunci inegalitatea cerută rezultă din adunarea inegalităţilor $(1-x)(1-y) \geq 0$ şi $(1-xy)(1-z) \geq 0$. (Nu putem avea egalitate în acest caz deoarece ar trebui ca două dintre variabile să fie 1 şi atunci cea de-a treia este 0.)
• Dacă $z > 1$, scriem inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică pentru numerele $x+y$ şi z, apoi folosim relaţia din enunţ:
$(x+y)+z \leq \sqrt{2\big((x+y)^2+z^2\big)} = \sqrt{2(2xy+2)} = 2\sqrt{xy+1}$. Din inegalitatea mediilor pentru $xy+1$ şi 1 avem mai departe $2\sqrt{xy+1} < (xy+1)+1 = xy+2 < xyz+2$.
Inegalitatea este astfel demonstrată.
Egalitatea are loc atunci când două dintre variabile sunt egale cu 1 şi cea de-a treia este 0.

Soluţia 2:
Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz avem $x+y+z-xyz = x\cdot(1-yz)+(y+z)\cdot 1 \leq \sqrt{[x^2+(y+z)^2]\cdot[(1-yz)^2+1^2]}$, deci este suficient să demonstrăm că $[x^2+(y+z)^2]\cdot[(1-yz)^2+1^2] \leq 4$, adică $(2+2yz)(2-2yz+y^2z^2) \leq 4$, sau $-2y^2z^2+2y^3z^3 \leq 0$, ceea ce este evident deoarece $2yz \leq y^2+z^2 \leq x^2+y^2+z^2=2$.

Soluţia 3: (*Titu Zvonaru*)
Prin omogenizare, inegalitatea se scrie

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2xyz \leq (x^2+y^2+z^2)\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)}. \qquad (1)$$

Dacă $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2xyz \leq (x^2+y^2+z^2) \leq 0$, inegalitatea (1) este adevărată. În caz contrar, după ridicare la pătrat, inegalitatea (1) este echivalentă cu

$$4x^2y^2z^2-3xyz\big((x+y+z)^3+2(x+y+z)(xy+yz+zx)\big)-(x+y+z)^6+$$

$$+8(x+y+z)^4(xy+yz+zx)-20(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2+16(xy+yz+zx)^3 \leq 0. \qquad (2)$$

Inegalitatea (2) este simetrică de gradul 6; deoarece coeficientul lui $(xyz)^2$ este pozitiv, este suficient să o demonstram în cazurile $z=0$ și $y=z$.
• În cazul $z=0$ inegalitatea (2) revine la $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$, adevărată, cu egalitate pentru $x=y \geq 0$ (adică $x=y=1$, $z=0$).

• În cazul $y = z$ trebuie să demonstrăm că $x^4 - 4x^3y + 8x^2y^2 - 8xy^3 = 8y^4 \geq 0$, care se scrie $(x^2 - 2xy)^2 + 4(xy - y^2)^2 + 4y^4 \geq 0$.

Am primit soluţii de la *Titu Zvonaru* şi *Marian Cucoaneş*.

Problem of the week no. 322

If x, y, z are real numbers such that $x^2+y^2+z^2 = 2$, then show that $x+y+z \leq xyz+2$.

IMO ShortList, 1987

Solution 1: (*Chan Ming Chu*)
Let us treat the case when not all numbers are positive.
Assume $z \leq 0$. We have $2 + xyz - x - y - z = (2 - x - y) - (1 - xy)z \geq 0$ because $x + y \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$ and $xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2} \leq 1$.
In this case, equality holds if and only if $x = y = 1$ and $z = 0$.
Next, we assume $0 < x \leq y \leq y \leq z$.
• If $z \leq 1$, then the conclusion follows by adding inequalities $(1 - x)(1 - y) \geq 0$ and $(1 - xy)(1 - z) \geq 0$. (Equality is not possible in this case because it requires two variables to be 1, which makes the third one to be 0.)
• If $z > 1$, we have:
$(x + y) + z \leq \sqrt{2\big((x + y)^2 + z^2\big)} = \sqrt{2(2xy + 2)} = 2\sqrt{xy + 1}$. From the AM-GM inequality written for $xy+1$ and 1 we get $2\sqrt{xy + 1} < (xy+1)+1 = xy+2 < xyz+2$.
The inequality is thus proven.
Equality holds when two of the variables are equal to 1 and the third one is 0.

Solution 2:
From the Cauchy-Bunyakowsky-Schwarz inequality we have
$x+y+z-xyz = x\cdot(1-yz)+(y+z)\cdot 1 \leq \sqrt{[x^2 + (y + z)^2] \cdot [(1 - yz)^2 + 1^2]}$, therefore it is sufficient to prove that $[x^2+(y+z)^2]\cdot[(1-yz)^2+1^2] \leq 4$, i.e. $(2+2yz)(2-2yz+y^2z^2) \leq 4$, or $-2y^2z^2 + 2y^3z^3 \leq 0$, which is obvious because $2yz \leq y^2 + z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Solution 3: (*Titu Zvonaru*)
Through homogenization, the inequality becomes

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz \leq (x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2)}. \qquad (1)$$

If $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2xyz \leq (x^2+y^2+z^2) \leq 0$, inequality (1) is true. Otherwise, squaring inequality (1) leads to

$$4x^2y^2z^2 - 3xyz\big((x + y + z)^3 + 2(x + y + z)(xy + yz + zx)\big) - (x + y + z)^6 +$$

$$+ 8(x+y+z)^4(xy+yz+zx)-20(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2+16(xy+yz+zx)^3 \leq 0. \qquad (2)$$

Inequality (2) is symmetric, of degree 6; as the coefficient of $(xyz)^2$ is positive, it is sufficient to prove it in cases $z = 0$ and $y = z$.

• In case $z = 0$ inequality (2) becomes $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$, which is true, with equality holding for $x = y \geq 0$ (i.e. $x = y = 1$, $z = 0$).

• In case $y = z$ we need to prove $x^4 - 4x^3y + 8x^2y^2 - 8xy^3 = 8y^4 \geq 0$, which can be written $(x^2 - 2xy)^2 + 4(xy - y^2)^2 + 4y^4 \geq 0$.