Problema săptămânii 321

În triunghiul ABC punctul M este mijlocul laturii AB, I este centrul cercului înscris, iar W este intersecţia bisectoarei $(AI$ cu cercul circummscris triunghiului ABC. Dacă $\sphericalangle BIM = 90^\circ$, arătaţi că:

a) $AI = 2IW$,

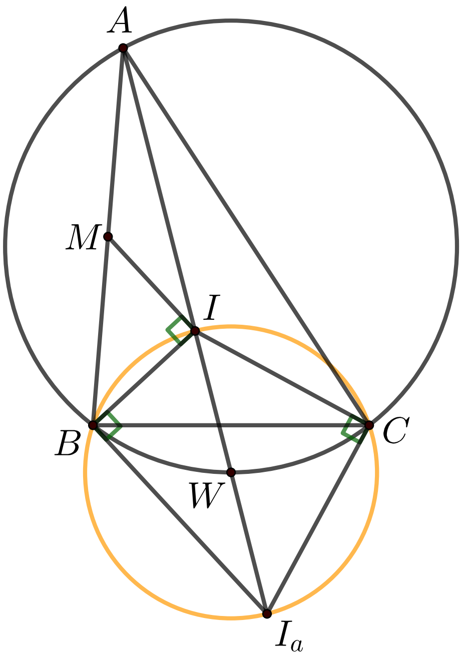
S. Berlov, A. Polianski, Kvant nr 12/2017

b) $AB + AC = 3BC$.

S. Berlov

Soluţie:

a) Fie I_a centrul cercului A-exînscris, tangent laturii BC şi prelungirilor laturilor AB şi AC. Evident, I_a se află pe bisectoarea $(AI$ a unghiului $\sphericalangle A$. Din Incenter-Excenter Lemma (vezi Evan Chen - The Incenter/Excenter Lemma) rezultă că $WI = WI_a = WB = WC$, adică W este centrul cercului circumscris patrulaterului $BICI_a$. Cum $BI_a \perp BI$ (bisectoarea exterioară este perpendiculară pe cea interioară), rezultă că $BI_a \parallel MI$. Aşadar MI este linie mijlocie în triunghiul ABI_a, deci $AI = II_a = 2IW$.

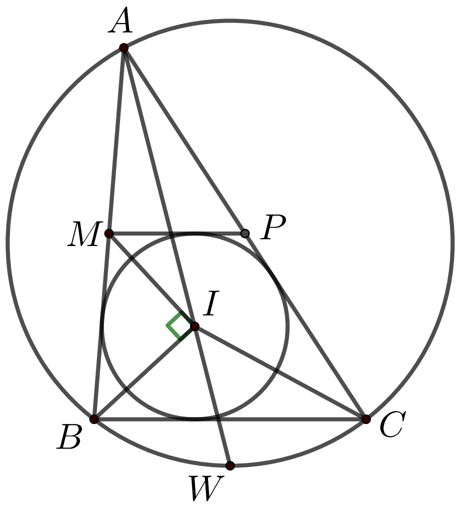


b) Vom prezenta 4 soluţii la acest subpunct.

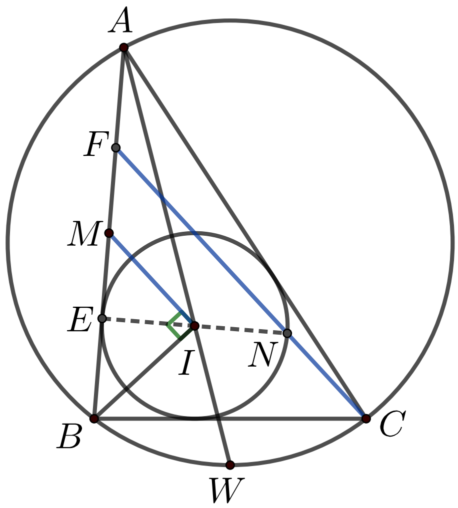
1. Omotetia de centru A care duce cercul înscris în cel A-exînscris duce AI în $AI_a = 2AI$, deci raportul omotetiei este 2. Atunci raza cercului A-exînscris este dublul razei cercului înscris. Se ştie (şi se arată uşor folosind arii) că raza cercului înscris este $r = \dfrac{S}{p}$, iar cea a cercului A-exînscris este $r_a = \dfrac{S}{p-a}$, unde S este aria triunghiului ABC, iar $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul. Din $r_a = 2r$ rezultă $p = 2(p-a)$, adică

$a+b+c = 2b+2c-2a$, de unde $b+c = 3a$.

2. Din M ducem şi cealaltă tangentă la cercul înscris. Ea intersectează AC în P. Atunci $\sphericalangle AMP = 180° - 2 \cdot \sphericalangle BMI = 2(90° - \sphericalangle BMI) = 2 \cdot \sphericalangle MBI = \sphericalangle ABC$, deci $MP \parallel BC$, adică MP este linie mijlocie în triunghiul ABC. Se ştie că într-un patrulater circumscriptibil suma lungimilor laturilor opuse este aceeaşi (Teorema lui Pitot). Avem, aşadar, $MB+PC = MP+BC$, adică $\frac{c}{2}+\frac{b}{2} = \frac{a}{2}+a$, de unde $3a = b+c$.



3. Fie E, respectiv F punctele de tangenţă ale cercului înscris, respectiv C-exînscris, cu latura AB şi fie N punctul diametral opus lui E în cercul înscris. Se ştie că punctele C, N şi F sunt coliniare (vezi Yufei Zhao - Three geometry lemmas) şi că $BE = AF$. Aşadar $EM = MF$ şi $EI = IN$ arată că MI este linie mijlocie în triunghiul FEN, deci $MI \parallel FC$. Rezultă că $BI \perp FC$, deci în triunghiul FBC semidreapta $(BI$ este bisectoare şi înălţime, deci $BF = BC$. Dar $BF = AE = p-a$, deci $a = p-a$, adică $2a = b+c-a$, de unde $b+c = 3a$.



4. (*Ionuţ Anghelina, Lucian Trepteanu* şi *Alberto Radu*)
Aplicând teorema lui Ptolemeu în patrulaterul inscriptibil $ABWC$ obţinem $AB\cdot CW + AC\cdot BW = BC\cdot AW$. Folosind că $AW = 3IW = 2BW = 3CW$ obţinem relaţia cerută.

Primele trei soluţii sunt adaptate după cele din frumosul articol al lui *A. Zaslavski*, One problem (în limba rusă).

Am primit soluţii de la: *Daniel Văcaru, Alexandru Ciobotea, Mihai Miculiţa, Ionuţ Anghelina, Lucian Trepteanu* şi *Alberto Radu*.

Problem of the week no. 321

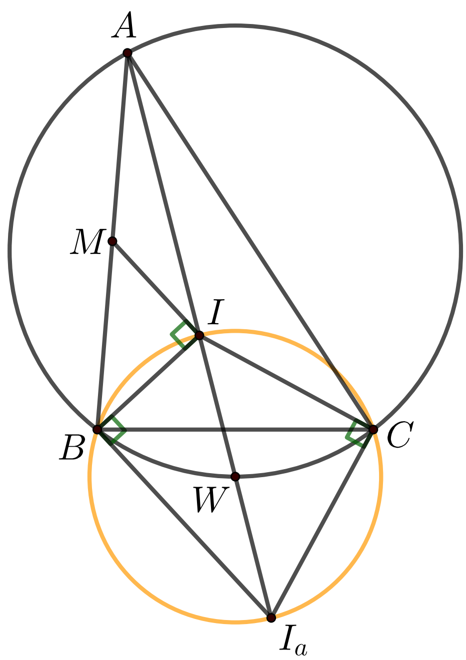
Let M be the midpoint of side AB of triangle ABC, I be the incenter of ABC, and W be the intersection point of the angle bisector $(AI$ with the circumcircle of ABC. If $\sphericalangle BIM = 90°$, prove that:
a) $AI = 2IW$,

S. Berlov, A. Polianski, Kvant nr 12/2017

b) $AB + AC = 3BC$.

S. Berlov

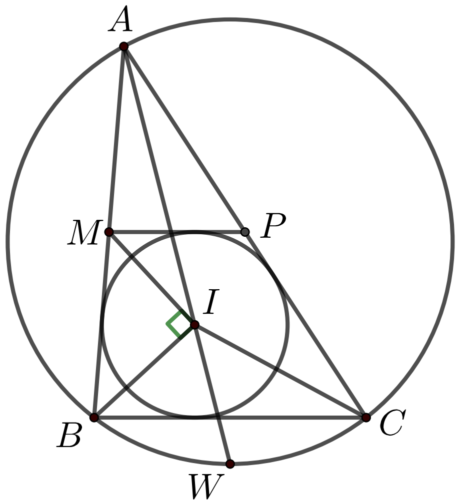
a) Let I_a be the center of the excircle tangent to the side BC and the extensions of sides AB and AC. Clearly I_a lies on the bisector $(AI$ of angle $\sphericalangle A$. From the Incenter-Excenter Lemma (see Evan Chen - The Incenter/Excenter Lemma) it follows that $WI = WI_a = WB = WC$, i.e. W is the circumcenter of the (cyclic) quadrilateral $BICI_a$. As $BI_a \perp BI$ (the internal and external angle bisectors are perpendicular), it follows that $BI_a \parallel MI$. Thus MI is a midsegment in triangle ABI_a, hence $AI = II_a = 2IW$.



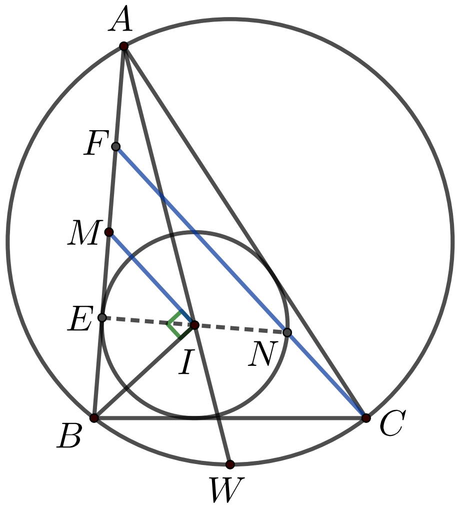
b) We present three solutions to this task.

1. The homothety centered at A that maps the incircle into the excircle of A maps AI into $AI_a = 2AI$, which means that the ratio of the homothety is 2. It follows that the exradius is twice the inradius. It is well known (and easy to prove) that the inradius is $r = \dfrac{K}{s}$, while the exradius is $r_a = \dfrac{K}{s-a}$, where K is the area surface of triangle ABC, and $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ is the semi-perimeter. From $r_a = 2r$ we get $s = 2(s-a)$, i.e. $a+b+c = 2b+2c-2a$, which leads to $b+c = 3a$.

2. We draw the other tangent from M to the incircle. It meats AC at P. Then $\sphericalangle AMP = 180^\circ - 2 \cdot \sphericalangle BMI = 2(90^\circ - \sphericalangle BMI) = 2 \cdot \sphericalangle MBI = \sphericalangle ABC$, which shows that $MP \parallel BC$, i.e. MP is a midsegment in triangle ABC. It is known that in a tangential quadrilateral (one that admits an incircle) the sums of lengths of opposite sides are the same (Pitot's Theorem). Thus, we have $MB + PC = MP + BC$, i.e. $\dfrac{c}{2} + \dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{2} + a$, which leads to $3a = b + c$.



3. Let E and F be the touchpoints of the incircle and the C-excircle with the side AB and let N be the point diametrically opposite to E in the incircle. It is well known that points C, N and F are collinear (see Yufei Zhao - Three geometry lemmas) and that $BE = AF$. Thus, $EM = MF$ and $EI = IN$ show that MI is a midsegment in triangle FEN, hence $MI \parallel FC$. It follows that $BI \perp FC$, hence, in triangle FBC, the ray $(BI$ is both an angle bisector and an altitude, which means that $BF = BC$. But $BF = AE = s - a$, hence $a = s - a$, i.e. $2a = b + c - a$, which means that $b + c = 3a$.



4. (*Ionuţ Anghelina, Lucian Trepteanu* and *Alberto Radu*)
Applying Ptolemy's Theorem to the cyclic quadrilateral $ABWC$ we obtain $AB \cdot CW + AC \cdot BW = BC \cdot AW$. Using the fact that $AW = 3IW = 2BW = 3CW$ we get immediately the desired relations.

The first three solutions are adapted after *A. Zaslavski*'s article One problem (in Russian).