Problema săptămânii 320

La o loterie, un jucător trebuie să aleagă 6 dintre numerele $1, 2, 3, \ldots, 36$ pentru a le scrie pe un bilet. Comisia loteriei va extrage apoi 6 numere la întâmplare dintre numerele $1, 2, 3, \ldots, 36$. Orice bilet care **nu** conţine niciunul din numerele extrase este câştigător. arătaţi că:
a) cumpărând 9 bilete, le puteţi completa în aşa fel încât, indiferent de numerele care vor fi extrase, să fiţi sigur că aveţi cel puţin un bilet câştigător;
b) cumpărând numai 8 bilete, indiferent de cum le completaţi, nu puteţi fi sigur că aveţi măcar un bilet câştigător.

S. Tokarev, Turneul Oraşelor, 1996

Soluţie:
a) Vom completa biletele în felul următor:
$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$, $(1, 2, 3, 7, 8, 9)$,
$(10, 11, 12, 13, 14, 15)$, $(13, 14, 15, 16, 17, 18)$, $(10, 11, 12, 16, 17, 18)$,
$(19, 20, 21, 22, 23, 24)$, $(25, 26, 27, 28, 29, 30)$, $(31, 32, 33, 34, 35, 36)$.
Pentru ca niciunul din aceste bilete să nu fie câştigător, trebuie să se extragă măcar două dintre numerele $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (altminteri, dintre biletele de pe primul rând, cel puţin unul ar fi câştigător). La fel, trebuie să se extragă măcar două dintre numerele $10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ (altminteri cel puţin unul dintre biletele de pe rândul al doilea ar fi câştigător). În fine, ar trebui să se extragă cel puţin un număr de pe fiecare din ultimele trei bilete (în caz contrar respectivul bilet ar fi câştigător). Dar asta înseamnă cel puţin 7 numere extrase, ori se extrag numai 6. Aşadar, cel puţin unul din cele 9 bilete de mai sus va fi câştigător.

b) Dacă un număr este scris pe trei bilete, atunci eventuala extragere a acelui număr, plus a câte unui număr de pe fiecare din celelalte 5 bilete, face ca toate biletele să fie necâştigătoare. Aşadar, fiecare număr poate să apară pe cel mult două bilete. În total, pe cele 8 bilete figurează 48 de numere, deci cel puţin 12 dintre ele apar de (exact) două ori. Să le spunem dubluri. Ne uităm la o dublură. Ea apare pe două bilete. Pe respectivele două bilete mai apar alte 10 numere, deci există o dublură care nu apare pe aceste două bilete. Dacă se extrag aceste două dubluri şi câte un număr de pe fiecare din cele 4 bilete pe care nu apar aceste două dubluri (total 6 numere), niciunul din cele 8 bilete nu va fi câştigător.

Problem of the week no. 320

In a lottery game, a person must select six distinct numbers from $1, 2, 3, \ldots, 36$ to put on a ticket. The lottery committee will then draw six distinct numbers randomly from $1, 2, 3, \ldots, 36$. Any ticket with numbers **not** containing any of these six numbers is a winning ticket. Prove that:
a) if you buy 9 tickets, you can choose your numbers such that, regardless on the numbers drown, you are guaranteed to have at least one winning ticket;
b) if you buy only 8 tickets, it is possible for you not to have any winning tickets, regardless of how you choose your numbers.

S. Tokarev, Tournament of Towns, autumn 1996

Solution:
a) We fill out the tickets in the following way:
$(1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $(4, 5, 6, 7, 8, 9)$, $(1, 2, 3, 7, 8, 9)$,
$(10, 11, 12, 13, 14, 15)$, $(13, 14, 15, 16, 17, 18)$, $(10, 11, 12, 16, 17, 18)$,
$(19, 20, 21, 22, 23, 24)$, $(25, 26, 27, 28, 29, 30)$, $(31, 32, 33, 34, 35, 36)$.
Assume none of these tickets is a winning one. This means that at least two of the numbers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ have been drawn (otherwise there would be a winning ticket among those on the first row). Similarly, at least two of the numbers $10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$ have been drawn (otherwise one of the tickets on the second row would be winning). Finally, one number from each of the last three tickets must have been drawn, otherwise that ticket would be winning. But this adds up to 7 drawn numbers, while only 6 are drawn. Thus, at least one of the 9 tickets above will be winning.

b) If a number is written on (at least) three tickets, then there is no guarantee of winning: if this numbers is drawn together with one number from each of the other 5 tickets, then we do not have a winning ticket. Thus, any number must appear at most twice. In total, there are 48 numbers written on the tickets, which means that at least 12 of them will appear (exactly) twice. Call these numbers *doubled numbers.* Consider one of these doubled numbers and the two tickets it appears on. On these two tickets there are 10 other numbers, so at least one of the doubled numbers does not figure on these two tickets. Consider a doubled number not appearing on these two tickets. These two doubled numbers appear together on 4 tickets. If they are drawn together with one number from each of the remaining 4 tickets, then none of the 8 tickets is a winning one.