**Problema săptămânii 319**

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ două permutări ale numerelor $1, 2, \ldots, 11$ (adică numere naturale astfel încât $\{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{11}\} = \{1, 2, \ldots, 11\}$).
Arătaţi că printre numerele $a_1b_1$, $a_2b_2$, $\ldots$, $a_{11}b_{11}$ există două care dau un acelaşi rest la împărţirea cu 11.
**Soluţie:** Să presupunem că numerele $a_1b_1$, $a_2b_2$, $\ldots$, $a_{11}b_{11}$ ar da resturi distincte la împărţirea cu 11. Exact unul dintre aceste numere trebuie să dea restul 0. Putem presupune că $a_1b_1 \equiv 0 \pmod{11}$. Deoarece numai unul dintre produse este divizibil cu 11, trebuie să avem $a_1 = b_1 = 11$. Fie $n = (a_2b_2) \cdot (a_3b_3) \cdot \ldots \cdot (a_{11}b_{11})$. Pe de-o parte, factorii sunt, într-o ordine sau alta, $1, 2, \ldots, 10 \pmod{11}$, ceea ce face ca $n \equiv 10! \equiv 10 \pmod{11}$. Pe de altă parte, $n = (a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{11})(b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{11}) = (10!) \cdot (10!) \equiv 10 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$. Am ajuns la o contradicţie care arată că presupunerea iniţială a fost falsă, deci cele 11 numere nu pot da 11 resturi diferite la împărţirea cu 11.

**Observaţie:** Este uşor de verificat prin calcul că $10! \equiv 10 \pmod{11}$, dar acest fapt rezultă direct şi din

**Teorema lui Wilson:** Un număr natural $p > 1$ este prim dacă şi numai dacă $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Am primit două soluţii, una de la *Alexandru Ciobotea*, cealaltă de la *Lucian Trepteanu* şi *Adrian Miclăuş*.

**Problem of the week no. 319**

Let $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ and $b_1, b_2, \ldots, b_{11}$ be two permutations of the numbers $1, 2, \ldots, 11$. Show that if each of the numbers $a_1b_1$, $a_2b_2$, $\ldots$, $a_{11}b_{11}$ is divided by 11, then at least two of them will have the same remainder.

**Solution:** Suppose the numbers $a_1b_1$, $a_2b_2$, $\ldots$, $a_{11}b_{11}$ have distinct remainders when divided by 11. Exactly one of them has remainder 0. By symmetry, we may assume $a_1b_1 \equiv 0 \pmod{11}$. As only one of the products is $0 \pmod{11}$, it follows that we must have $a_1 = b_1 = 11$. Consider $n = (a_2b_2) \cdot (a_3b_3) \cdot \ldots \cdot (a_{11}b_{11})$. On one hand, the factors are, in some order, $1, 2, \ldots, 10 \pmod{11}$, which makes $n \equiv 10! \equiv 10 \pmod{11}$. On the other hand, $n = (a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{11})(b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_{11}) = (10!) \cdot (10!) \equiv 10 \cdot 10 \equiv 1 \pmod{11}$. We have obtained a contradiction, which means that the remainders can not be all distinct.

**Remark:** It is an easy computation to check that $10! \equiv 10 \pmod{11}$, but this fact also follows directly from

**Wilson's Theorem:** A positive integer $p > 1$ is a prime if and only if $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.