Problema săptămânii 318

Fie $n>1$ un număr natural şi fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a^n+b^n+c^n = 3$. Arătaţi că

$$\frac{1}{a^{n+1}+n}+\frac{1}{b^{n+1}+n}+\frac{1}{c^{n+1}+n}\geq\frac{3}{n+1}.$$

Soluţie: Folosim inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică pentru $n+1$ numere dintre care n sunt egale cu 1 (sau, direct, inegalitatea mediilor ponderată): $a^{n+1}+\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ times}}\geq(n+1)\sqrt[n+1]{a^{n+1}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}=a$. Folosind inegalitatea dedusă mai sus şi analoagele scrise pentru b şi c obţinem

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^{n+1}+n}=\frac{1}{n}\sum_{cyc}\left(1-\frac{a^{n+1}}{n+a^{n+1}}\right)\geq\frac{1}{n}\sum_{cyc}\left(1-\frac{a^n}{n+1}\right)=\frac{3}{n+1}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=1$.

Remarcă: (*Alexandru Ciobotea*)
Inegalitatea $a^{n+1}+n\geq(n+1)a$ rezultă direct din inegalitatea lui Bernoulli: $(x+1)^m\geq 1+mx$, $\forall\, x>-1$, $\forall\, m\in\mathbb{N}$. Scriind inegalitatea lui Bernoulli pentru $x=a-1\geq-1$ şi $m=n+1$ obţinem inegalitatea dorită.

Morala: Numitorul sugerează aplicarea inegalităţii deduse la începutul soluţiei de mai sus. Însă minorarea $a^{n+1}+n\geq(n+1)a$ conduce la o majorare ($\leq$) a fracţiei din $\dfrac{1}{a^{n+1}+n}$, ori noi avem nevoie de o minorare ($\geq$).

Trucul este să scădem ceva din fiecare fracţie până devine negativă, apoi înmulţim inegalitatea cu -1 ceea ce îi va schimba sensul (în sensul dorit de noi) şi abia apoi aplicăm inegalitatea descoperită la început. Asta conduce la următoarea rezolvare (echivalentă cu cea de mai sus, dar poate puţin mai intuitivă):

Inegalitatea de demonstrat se poate scrie echivalent

$$\left(\frac{1}{a^{n+1}+n}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{b^{n+1}+n}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{c^{n+1}+n}-\frac{1}{n}\right)\geq\frac{3}{n+1}-\frac{3}{n},$$

adică

$$\frac{-a^{n+1}}{n(a^{n+1}+n)}+\frac{-b^{n+1}}{n(b^{n+1}+n)}+\frac{-c^{n+1}}{n(c^{n+1}+n)}\geq\frac{-3}{n(n+1)}.$$

Înmulţind cu $-n<0$, sensul inegalităţii se schimbă, astfel că aceasta devine

$$\frac{a^{n+1}}{a^{n+1}+n}+\frac{b^{n+1}}{b^{n+1}+n}+\frac{c^{n+1}}{c^{n+1}+n}\leq\frac{3}{n+1}.$$

Dar $a^{n+1}+n\geq(n+1)a$ şi analoagele pentru b şi c implică

$$\frac{a^{n+1}}{a^{n+1}+n}+\frac{b^{n+1}}{b^{n+1}+n}+\frac{c^{n+1}}{c^{n+1}+n}\leq\frac{a^{n+1}}{(n+1)a}+\frac{b^{n+1}}{(n+1)b}+\frac{c^{n+1}}{(n+1)c}=\frac{a^n+b^n+c^n}{n+1}=\frac{3}{n+1}.$$

Am primit soluţii de la *Daniel Văcaru* şi *Alexandru Ciobotea*.

Problem of the week no. 318

Let $n > 1$ be an integer and let a, b, c be positive real numbers such that $a^n + b^n + c^n = 3$. Prove that

$$\frac{1}{a^{n+1}+n} + \frac{1}{b^{n+1}+n} + \frac{1}{c^{n+1}+n} \geq \frac{3}{n+1}.$$

Solution: We use the AM-GM inequality for $n+1$ numbers, n of which are equal to 1: $a^{n+1} + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ times}} \geq (n+1)\sqrt[n+1]{a^{n+1} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} = a$. Using this and its analogues written for b and c we get

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^{n+1}+n} = \frac{1}{n} \sum_{cyc} \left(1 - \frac{a^{n+1}}{n + a^{n+1}}\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{cyc} \left(1 - \frac{a^n}{n+1}\right) = \frac{3}{n+1}.$$