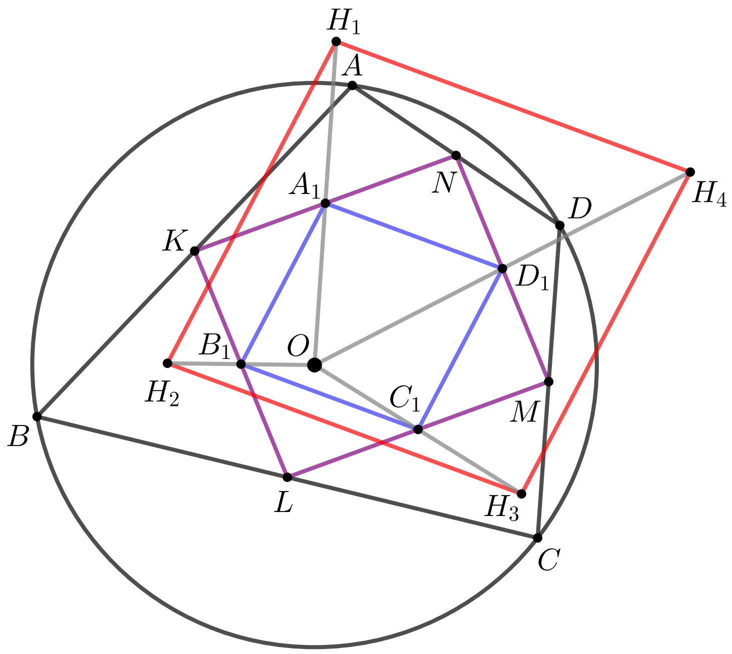
Problema săptămânii 317

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil şi K, L, M, N mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Arătaţi că ortocentrele triunghiurilor AKN, BKL, CLM, DMN sunt vârfurile unui paralelogram.

Olimpiadă Hong Kong, 2003

Soluţia 1: Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$, A_1, B_1, C_1, D_1 mijloacele segmentelor $[NK]$, $[KL]$, $[LM]$, respectiv $[MN]$ şi H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor AKN, BKL, CLM, respectiv DMN.



Vom folosi trei fapte bine cunoscute:

(F1) Proiecţia centrului cercului pe o coardă este mijlocul coardei.

(F2) Mijloacele laturilor unui patrulater sunt vârfurile unui paralelogram (Varignon).

(F3) Într-un triunghi ABC, punctul diametral opus vârfului A în cercul circumscris coincide cu simetricul ortocentrului faţă de mijlocul laturii $[BC]$.

Folosind aceste fapte avem că:

1. Patrulaterul $AKPN$ este inscriptibil, anume în cercul de diametru $[AO]$ (şi analog pentru patrulaterele $BLOK$, $CMOL$ şi $DNOM$). (F1)

2. În cercul circumscris triunghiului AKN, punctul O este punctul diametral opus lui A, deci H_1 este simetricul lui O faţă de A_1. (F3)

3. $A_1B_1C_1D_1$ este paralelogram. (F2)

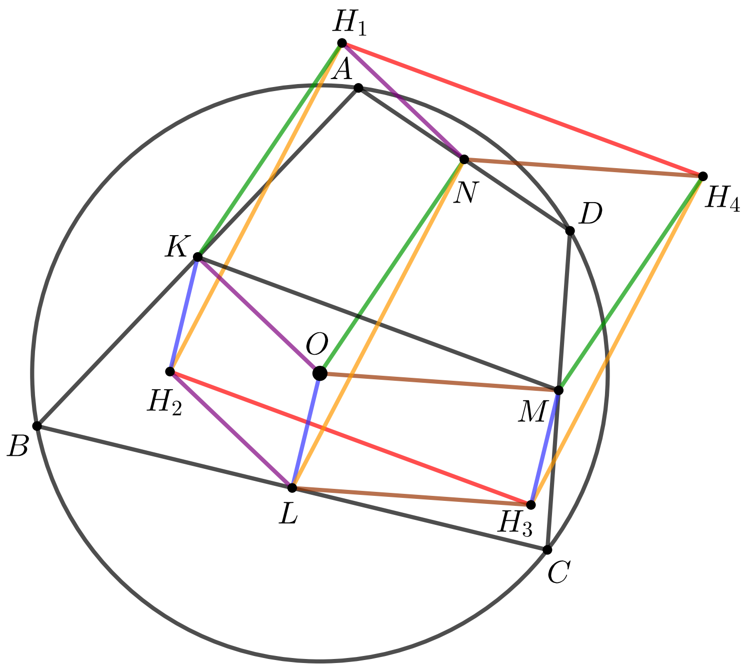
4. Punctele H_1, H_2, H_3 şi H_4 fiind simetricele lui O faţă de A_1, B_1, C_1, respectiv D_1, rezultă uşor că şi $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

Un argument scurt ar fi că omotetia (directă) de centru O şi raport 2 transformă paralelogramul $A_1B_1C_1D_1$ într-un paralelogram.

Altfel spus (puţin mai lung):

$[A_1B_1]$ şi $[C_1D_1]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile OH_1H_2, respectiv OH_3H_4, deci $H_1H_2 \parallel A_1B_1 \parallel C_1D_1 \parallel H_3H_4$ şi $H_1H_2 = 2A_1B_1 = 2C_1D_1 = H_3H_4$.

Soluţia 2: (asemănătoare cu prima)
Vom folosi notaţiile introduse la soluţia 1 şi două fapte bine cunoscute:
(F1) Proiecţia centrului cercului pe o coardă este mijlocul coardei.
(F2) Într-un triunghi ABC, punctul diametral opus vârfului A în cercul circumscris coincide cu simetricul ortocentrului faţă de mijlocul laturii $[BC]$.
Folosind aceste fapte avem că:
1. Patrulaterul $AKPN$ este inscriptibil, anume în cercul de diametru $[AO]$ (şi analog pentru patrulaterele $BLOK$, $CMOL$ şi $DNOM$). (F1)
2. În cercul circumscris triunghiului AKN, punctul O este punctul diametral opus lui A, deci H_1 este simetricul lui O faţă de A_1. (F2)
Cu alte cuvinte, H_1KON, H_2LOK, H_3MOL şi H_4NOM sunt paralelograme.
Deducem că $H_1K \parallel ON \parallel H_4M$ şi $H_1K = ON = H_4M$, deci H_1KMH_4 este paralelogram. Analog, şi H_2KMH_3 este paralelogram. Atunci $H_1H_4 \parallel KM \parallel H_2H_3$ şi $H_1H_4 = KM = H_2H_3$, de unde concluzia.



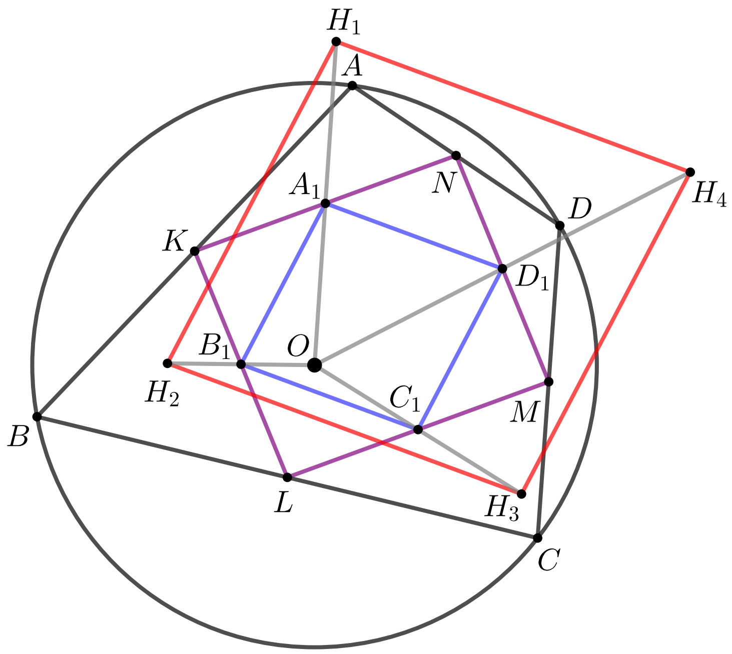
Am primit soluţii de la: *Alexandru Ciobotea, Mihai Miculiţa, Adrian Miclăuş* şi *Lucian Trepteanu.*

Problem of the week no. 317

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. K, L, M, N are the midpoints of sides AB, BC, CD and DA respectively. Prove that the orthocenters of triangles AKN, BKL, CLM, DMN are the vertices of a parallelogram.

Hong Kong, 2003

Solution 1: Let O be the circumcenter of $ABCD$, A_1, B_1, C_1, D_1 be the midpoints of line segments $[NK]$, $[KL]$, $[LM]$, and $[MN]$, respectively. Finally, denote by H_1, H_2, H_3, H_4 the orthocenters of triangles AKN, BKL, CLM, and DMN, respectively.



We use three well known facts:
(F1) The projection of the center of a circle onto a chord is the midpoint of the chord.
(F2) The midpoints of the sides of a quadrilateral are the vertices of a parallelogram (Varignon).
(F3) In a triangle ABC, the point diametrically opposed to A in the circumcircle is the symmetric of the orthocenter with respect to the midpoint of the side $[BC]$.
Using these fact we get:
1. Quadrilateral $AKPN$ is cyclic, being inscribed in the circle of diameter $[AO]$ (similar results also hold for $BLOK$, $CMOL$ şi $DNOM$). (F1)
2. In the circumcircle of triangle AKN, point O is diametrically opposed to A, therefore H_1 is the symmetric of O with respect to A_1. (F3)
3. $A_1B_1C_1D_1$ is a parallelogram. (F2)
4. Points H_1, H_2, H_3, and H_4 being the reflections of O across A_1, B_1, C_1, and D_1, it follows easily that $H_1H_2H_3H_4$ is also a parallelogram.
The short argument is that the (direct) homothety of center O and factor 2 maps

the parallelogram $A_1B_1C_1D_1$ into another parallelogram.
The longer version:
$[A_1B_1]$ and $[C_1D_1]$ are mid-segments in triangles OH_1H_2 and OH_3H_4, respectively, therefore $H_1H_2 \parallel A_1B_1 \parallel C_1D_1 \parallel H_3H_4$ and $H_1H_2 = 2A_1B_1 = 2C_1D_1 = H_3H_4$.

Solution 2: (similar to the first one)
We use the notations introduces in the first solution as well as the following two facts:
(F1) The projection of the center of a circle onto a chord is the midpoint of the chord.
(F2) In a triangle ABC, the point diametrically opposed to A in the circumcircle is the symmetric of the orthocenter with respect to the midpoint of the side $[BC]$.
Using these facts we obtain that:
1. Quadrilateral $AKPN$ is cyclic, being inscribed in the circle of diameter $[AO]$ (similar results also hold for $BLOK$, $CMOL$ şi $DNOM$). (F1)
2. In the circumcircle of triangle AKN, point O is diametrically opposed to A, therefore H_1 is the symmetric of O with respect to A_1. (F2)
In other words, H_1KON, H_2LOK, H_3MOL and H_4NOM are parallelograms.
We deduce that $H_1K \parallel ON \parallel H_4M$ and $H_1K = ON = H_4M$, hence H_1KMH_4 is a parallelogram. Similarly, H_2KMH_3 is also a parallelogram. It follows that $H_1H_4 \parallel KM \parallel H_2H_3$ and $H_1H_4 = KM = H_2H_3$, and the conclusion is now clear.