Problema săptămânii 316

Avem 111 monede şi o tablă $n \times n$ împărţită în n^2 pătrăţele unitate. Monedele sunt plasate în interiorul pătrăţelelor unitate (un pătrăţel unitate putând conţine o monedă, mai multe monede sau nicio monedă), astfel încât diferenţa dintre numărul de monede să fie 1 pentru orice două pătrăţele unitate vecine (care au o latură comună). Aflaţi valoarea maximă a lui n pentru care acest lucru este posibil.

Olimpiada Zhautykov, 2007

Soluţie: Vom demonstra că n maxim este 13.

Dacă n este par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, atunci pe fiecare linie vor fi k pătrăţele care au un număr par de monede şi k pătrăţele care au un număr impar de monede, deci numărul total de monede de pe fiecare linie este un număr de aceeaşi paritate cu k. Pe ansamblul delor $2k$ linii vom avea astfel un număr par de monede, deci nu putem avea 111 monede dacă n este par.
(Alt argument pentru faptul că n nu poate fi par: dacă $n = 2k$, tabla poate fi pavată cu k^2 pătrate 2×2 şi fiecare asemenea pătrat trebuie să conţină un număr par de monede.)

Dacă $n \geq 15$ este impar, $n = 2k + 1$ cu $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 7$, putem plasa pe tablă $2k^2 + 2k$ dominouri 1×2 sau 2×1 fără suprapuneri. (De exemplu, pe fiecare linie, pe primele $2k$ coloane plasăm k dominouri orizontale. Apoi, după ce am pavat dreptunghiul $n \times (n - 1)$ cu dominouri, putem plasa pe ultima coloană alte k dominouri verticale. Un pătrăţel rămâne neacoperit.) Fiecare domino acoperă două pătrăţele vecine. Întrunul din ele vom avea un număr impar de monede, deci cel puţin o monedă. Aşadar, în total vom avea cel puţin $2k^2+2k$ monede. Dar $2k^2+2k \geq 2\cdot 7^2+2\cdot 7 = 112 > 111$, deci dacă $n \geq 15$ nu putem avea 111 monede pe tablă.

Vom demonstra că putem plasa 111 monede pe o tablă 13×13 astfel încât numărul monedelor din orice două pătrăţele vecine să difere prin 1. Vom colora tabla ca pe o tablă de şah, cu colţurile negre. În fiecare pătrăţel negru punem o monedă, iar în fiecare pătrăţel alb punem deocamdată 0. În total, pe tablă sunt 85 de monede. Alegem 13 pătrăţele albe şi în fiecare din ele punem câte două monede. Acum pe tablă vor fi $85 + 2 \cdot 13 = 111$ monede şi în oricare două pătrăţele vecine, unul negru celălalt alb, vom avea o monedă, respectiv 0 sau 2 monede.

Remarcă: O problemă asemănătoare s-a dat Simularea 1 - upper.school, în 2021. Vezi problema 3.

Am primit o soluţie de la *Adrian Miclăuş şi Lucian Trepteanu* (împreună) şi o alta de la *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 316

There are given 111 coins and a $n \times n$ table divided into unit cells. This coins are placed inside the unit cells (one unit cell may contain one coin, many coins, or may be empty), such that the difference between the number of coins from two neighboring cells (that have a common edge) is 1. Find the maximal n for this to be possible.

International Zhautykov Olympiad, 2007

Solution: We prove that the maximum value of such an n is 13.

If n is even, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, then each line has k squares with an even number of coins and k squares with an odd number of coins. The total number of coins on each line will have the same parity as k. Adding $2k$ such total will yield an even total, showing that one cannot have 111 coins if n is even.
(Another argument for the fact that n cannot be even: if $n = 2k$, the table can be split into k^2 squares 2×2 and each of these squares must contain an even number of coins.)

If $n \geq 15$ is odd, $n = 2k + 1$ with $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 7$, we can place on the table $2k^2 + 2k$ non-overlapping dominoes 1×2 or 2×1. (For example, on the cover the first $2k$ columns by horizontal dominoes, then place k vertical dominoes on the last column. One square will remain uncovered.) Each domino covers two neighboring squares. One of them contains an odd number of coins, i.e. at least one coin. Thus, in total, there are at least $2k^2 + 2k$ coins on the table. But $2k^2 + 2k \geq 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 = 112 > 111$, showing that in case that $n \geq 15$, one cannot have 111 coins on the table.

Finally, we show that we can indeed place 111 coins on a 13×13 table such that the number of coins in any two neighboring squares differ by 1. Color the squares of the board in a chessboard pattern, with the corners being black. For now, let us put one coin in each black square (an none in the white squares). So far, we have placed 85 coins. Now, let us pick 13 of the white squares and place two coins in each of these 13 squares. Now we have $85 + 2 \cdot 13 = 111$ coins and in every pair of neighboring squares, there is 1 coin in the black square and 0 or 2 coins in the white square, so that the difference is 1 anyhow.