și rezultă prin adunarea inegalităților:

- $\sum a^6 - \sum(a^4b^2 + a^2b^4) \geqslant -3a^2b^2c^2$ (*Schur*), înmulțită cu 2
- $\sum(a^5b + ab^5) \geqslant 2\sum a^3b^3$ (*Muirhead*), înmulțită cu 10
- $\sum a^4bc \geqslant 3a^2b^2c^2$ (*MA-MG*), înmulțită cu 42
- $\sum(a^3b^2c + a^3bc^2) \geqslant 6a^2b^2c^2$ (*MA-MG*), înmulțită cu 28.

c) Avem $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) - \frac{3}{k+1} = \frac{8}{4k+1} + \frac{1}{k+4} - \frac{3}{k+1} = \frac{3(7-2k)}{(k+1)(k+4)(4k+1)} > 0$ pentru $k < \frac{7}{2}$.

Apoi $E\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) - \frac{3}{k+1} = \frac{8}{4k+9} + \frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} = \frac{3(3-2k)}{k(k+1)(4k+9)} < 0$ pentru $k > \frac{3}{2}$, ceea ce probează concluzia.

BIBLIOGRAFIE

[1] M. Bălună, *O inegalitate pentru funcții polinomiale simetrice și omogene*, GM-B, nr. 4/1988.

[2] E. Chen, https://web.evanchen.cc/handouts/SOS_Dumbass/SOS_Dumbass.pdf

[3] T. Zvonaru, N. Stanciu, *O modalitate de a demonstra unele inegalități*, RMT, nr. 3/2014.

EXAMENE ȘI CONCURSURI

OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI, 2021

prezentare de MARIUS PERIANU,[1)], CRISTIAN MANGRA[2)], CRISTIAN LAZĂR[3)] și DĂNUȚ ARAMĂ[4)]

În perioada 29 iunie - 4 iulie 2021 s-a desfășurat cea de a 25-a ediție a Olimpiadei Balcanice de Matematică pentru Juniori (JBMO 2021), găzduită, în format virtual, de Republica Moldova. La concurs au participat echipe formate din câte 6 elevi din Albania, Bulgaria, Bosnia și Herțegovina, Cipru, Grecia, Macedonia, Moldova, Muntenegru, România, Serbia și Turcia (țări „oficiale"), precum și echipe din Arabia Saudită, Azerbaidjan, Croația, Franța, Filipine, Indonezia, Kazahstan, Kîrgîzstan, Moldova (echipa B), Tadjikistan și Turkmenistan (țări invitate).

Pentru fiecare echipă, concursul s-a desfășurat într-un centru de examen național, cu supraveghere video, monitorizată de țara organizatoare. În România, centrul de examen a fost organizat, în condiții excelente, la Colegiul Național „Tudor Vianu" din București.

[1)] Profesor, Colegiul Național „Ion Minulescu", Slatina.

[2)] Profesor, Colegiul Național „Tudor Vianu", București.

[3)] Profesor, Colegiul Național, Iași.

[4)] Profesor, Colegiul Național „Emil Racoviță", Iași.

Elevii români au obținut următoarele rezultate:

Medalii de aur: *Ionuț Gabriel Stan* (clasa a VIII-a, Liceul Internațional de Informatică, București) - punctaj maxim, *Elisa Ipate* (clasa a VIII-a, Liceul Internațional de Informatică, București), *Emanuel Mazăre* (clasa a VII-a, Școala Gimnazială „Mihai Eminescu", Pitești).

Medalii de argint: *David Ghibu* (clasa a VII-a, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu", Călărași), *Radu-Ionuț Stoleriu* (clasa a VII-a, Colegiul Național „Emil Racoviță", Iași), *Andrei Vila* (clasa a VII-a, Liceul Internațional de Informatică, București).

Echipa României a fost condusă de profesorii *Marius Perianu* (Colegiul Național „Ion Minulescu", Slatina) - leader, membru al Board-ului JBMO, *Cristian Mangra* (Colegiul Național „Tudor Vianu", București) - deputy leader, *Cristian Lazăr* (Colegiul Național Iași) - observator, *Dănuț Aramă* (Colegiul Național „Emil Racoviță", Iași) - observator.

În clasamentul neoficial pe națiuni, România a ocupat detașat locul întâi, cu 193 de puncte, la mare distanță de celelalte locuri de pe podium (Bulgaria - 120 de puncte, respectiv Turcia - 111 puncte).

Prezentăm, în continuare, problemele date în concurs și soluțiile acestora.

Problema 1. Fie n $(n \geqslant 1)$ un număr întreg. Considerăm ecuația

$$2 \cdot \left[\frac{1}{2x}\right] - n + 1 = (n+1)(1 - nx),$$

unde x este o variabilă reală (notația $[\cdot]$ semnifică partea întreagă).

a) Rezolvați ecuația pentru $n = 8$.

b) Arătați că există un număr întreg n pentru care ecuația are cel puțin 2021 de soluții.

Soluție. Evident, $x \neq 0$. Notăm $\left[\frac{1}{2x}\right] = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

a) Pentru $n = 8$, ecuația devine $k = 8 - 36x$, deci $x = \dfrac{8-k}{36}$. Atunci $k \neq 8$ și $k = \left[\dfrac{18}{8-k}\right]$. Analizând semnele, deducem că $0 < k < 8$. Prin verificare directă rezultă $k \in \{3, 4\}$, pentru care obținem $x \in \left\{\dfrac{5}{36}, \dfrac{1}{9}\right\}$.

b) Ecuația se rescrie $x = \dfrac{2(n-k)}{n(n+1)}$, deci $k \neq n$ și $k = \left[\dfrac{n(n+1)}{4(n-k)}\right]$, (1). Din nou, analizând semnele, deducem că $0 \leqslant k < n$. Din (1) obținem

$$k \leqslant \frac{n(n+1)}{4(n-k)} < k+1 \iff \begin{cases} (2k-n)^2 + n \geqslant 0 \\ (2k+1-n)^2 < n+1 \end{cases}.$$

Prima inegalitate din sistem este adevărată pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ și orice $n \geqslant 1$, iar a doua inegalitate conduce la

$$k \in I_n := \Big(\frac{n-1-\sqrt{n+1}}{2}, \frac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}\Big). \tag{2}$$

Reciproc, dacă un anumit $k \in \mathbb{Z}$, cu $0 \leqslant k < n$, verifică relația (2), atunci $x = \dfrac{2(n-k)}{n(n+1)}$ este soluție a ecuației date.

Considerând $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n+1} > 2021$ (de exemplu $n = 2021^2$), intervalul I_n conține cel puțin 2021 de numere întregi, deci ecuația din enunț are cel puțin 2021 de soluții.

Această problemă a fost complet rezolvată de toți elevii români, unul singur pierzând un punct pentru lipsa unei justificări minore la final.

Problema 2. Pentru orice mulțime $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, formată din cinci numere întregi pozitive distincte, notăm cu S_A suma elementelor sale, iar cu T_A numărul tripletelor (i, j, k) cu $1 \leqslant i < j < k \leqslant 5$ pentru care $x_i + x_j + x_k$ divide S_A.

Determinați cea mai mare valoare posibilă a lui T_A.

Soluție. Vom arăta că valoarea maximă a lui T_A este 4.

Numim *potrivit* un triplet (i, j, k) cu proprietatea că $x_i + x_j + x_k \mid S_A$ (unde $1 \leqslant i < j < k \leqslant 5$). Astfel, $x_i + x_j + x_k$ este un divizor propriu al lui S_A, deci $x_i + x_j + x_k \leqslant \frac{1}{2} S_A$.

Prin urmare tripletele $(3,4,5)$, $(2,4,5)$, $(1,4,5)$, $(2,3,5)$, $(1,3,5)$ nu pot fi potrivite, deoarece au sumele corespunzătoare mai mari decât $\frac{1}{2} S_A$. Tripletele $(1,2,5)$ și $(2,3,4)$ nu pot fi, ambele, potrivite: în caz contrar, am avea $x_1 + x_2 + x_5 \leqslant \frac{1}{2} S_A$ și $x_2 + x_3 + x_4 \leqslant \frac{1}{2} S_A$ și, adunând inegalitățile, obținem contradicția $x_2 + S_A \leqslant S_A$. Așadar, putem avea cel mult 4 triplete potrivite: $(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,3,4)$ și cel mult unul dintre $(1,2,5)$ sau $(2,3,4)$.

Construim un exemplu cu $T_A = 4$, luând $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Alegem x_5 astfel încât S_A să fie divizibil prin 6, 7, 8 și 9. Cel mai mic număr convenabil este $x_5 = 494$ și atunci $S_A = 504$.

La această problemă, David, Radu, Ionuț, Elisa și Emanuel au obținut punctaj maxim, cu soluții asemănătoare cu soluția oficială, David începând cu mulțimea $\{1, 2, 4, 10\}$ și finalizând folosind lema chinezească a resturilor.

Andrei a rezolvat problema parțial, iar România a obținut 56 de puncte din 60 posibile la aceată problemă.

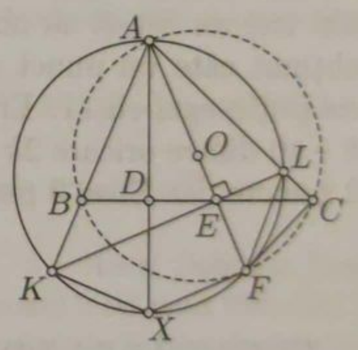
Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic scalen, iar O centrul cercului circumscris acestui triunghi. Fie D piciorul înălțimii duse din A pe latura BC. Dreptele BC și AO se intersectează în E. Fie s dreapta dusă prin E perpendicular pe AO. Dreapta s intersectează AB și AC în K, respectiv L. Notăm cu ω cercul circumscris triunghiului AKL. Dreapta AD intersectează din nou ω în X.

Arătați că ω și cercurile circumscrise triunghiurilor ABC și DEX au un punct comun.

Soluție. Semidreptele AD și AE sunt izogonale, deci $\sphericalangle KAX \equiv \sphericalangle LAE$. Patrulaterul $AKXL$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle AXK \equiv \sphericalangle ALK$. Ca urmare, $\sphericalangle KAX + \sphericalangle AXK = \sphericalangle LAE + \sphericalangle ALE = 90°$, de unde rezultă că AX este diametru în cercul ω.

Fie $\{F\} = AE \cap \omega$. Deoarece $\sphericalangle ELF = 90° - \sphericalangle EFL$ și $\sphericalangle ELF = \sphericalangle KLF \equiv \sphericalangle KAF = \sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle DAC = 90° - \sphericalangle ECL$, rezultă că $\sphericalangle EFL \equiv \sphericalangle ECL$, deci patrulaterul $EFCL$ este inscriptibil. Ca urmare, $\sphericalangle LCF = \sphericalangle LEF = 90°$, deci $\sphericalangle ACF = 90°$. Deducem că F este punctul diametral opus lui A pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Cum $\sphericalangle EDF + \sphericalangle XFE = 90° + 90° = 180°$, rezultă că F este situat și pe cercul circumscris triunghiului DEX, ceea ce încheie soluția.



David a dat o soluție asemănătoare cu cea prezentată. Andrei a arătat mai întâi că patrulaterul $BLCK$ este inscriptibil. Notând cu Γ cercul circumscris acestui patrulater și cu Ω cercul circumscris triunghiului ABC, punctul E este centrul radical al cercurilor Ω, Γ și ω, deci al doilea punct de intersecție a cercurilor ω și Ω, notat cu P, se află pe dreapta AE, ceea ce reduce problema la a arăta că patrulaterul $DXPE$ este inscriptibil.

Radu, Ionuț, Elisa și Emanuel au plecat de la următoarea idee: notând cu Y al doilea punct de intersecție dintre AE și cercul circumscris triunghiului ABC, se arată că patrulaterul $DEYX$ este inscriptibil și că $Y \in \omega$.

Toți elevii noștri au obținut punctaj maxim la această problemă.

Problema 4. Fie M o submulțime a mulțimii $\{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ astfel încât pentru orice trei elemente (nu neapărat distincte) a, b, c din M avem $|a + b - c| > 10$.

Determinați cel mai mare număr posibil de elemente ale mulțimii M.

Soluție (Ionuț-Gabriel Stan). Mulțimea $M = \{1016, 1017, \ldots, 2021\}$ are 1006 elemente și satisface condiția din enunț, deoarece $a+b-c \geqslant 1016 + 1016 - 2021 = 11$, pentru orice $a, b, c \in M$.

Fie M o mulțime cu proprietatea din enunț. Vom arăta că M are cel mult 1006 elemente. Presupunem, prin absurd, că M conține elementele $a_1 < a_2 < \ldots < a_{1007}$. Definim numerele:

$$A_1 = a_{1007} - a_{1006},\ A_2 = a_{1007} - a_{1005},\ \ldots,\ A_{1006} = a_{1007} - a_1,$$

respectiv

$$A_{1007} = a_{1007} - a_1 + 1,\ A_{1008} = a_{1007} - a_1 + 2,\ \ldots, A_{1016} = a_{1007} - a_1 + 10.$$

Avem $0 < A_1 < A_2 < \ldots < A_{1016}$.

Observăm că $x = |x+x-x| > 10$, adică $x \geqslant 11$, pentru orice $x \in M$. Ca urmare, $A_{2016} = a_{1007} - a_1 + 10 \leqslant 2021 - 11 + 10 = 2020$, deci $1 \leqslant A_k \leqslant 2020$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 1016\}$.

Atunci $a_1, a_2, \ldots, a_{1007}, A_1, A_2, \ldots, A_{1016}$ sunt 2023 de numere din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 2021\}$, deci există $i \in \{1, 2, \ldots, 1007\}$ și $j \in \{1, 2, \ldots, 1016\}$ astfel încât $a_i = A_j$.

Dacă $j \leqslant 1006$, atunci $a_i = a_{1007} - a_{1007-j}$, deci $|a_i + a_{1007-j} - a_{1007}| = 0 < 10$, contradicție. Dacă $j \geqslant 1007$, atunci $a_i = a_{1007} - a_1 + j - 1006$, deci $|a_i + a_1 - a_{1007}| = j - 1006 < 10$, din nou contradicție.

În concluzie, numărul maxim de elemente ale lui M este egal cu 1006.

Această problemă s-a dovedit a fi foarte dificilă: dintre cei 128 de concurenți, doar patru (printre care și Ionuț) au dat soluții complete, iar alți trei au reușit să obțină cel puțin 7 puncte. David, Andrei și Radu au obținut câte un punct pentru observația că elementul minim al lui M este cel puțin egal cu 11. Emanuel și Elisa au demonstrat că M conține cel mult $k - 10$ dintre oricare $2k - 20$ numere naturale consecutive. Emanuel a primit 2 puncte, iar Elisa 3 puncte, suficient pentru a își asigura medaliile de aur.

PROBLEME

REZOLVAREA PROBLEMELOR DIN GAZETA MATEMATICĂ Nr. 12/2021

PROBLEME PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

E:16127. *Scrieți numărul* 1845^{2021} *ca suma a trei pătrate perfecte.*

Gheorghe Iacob, Pașcani

Soluție. $1845^{2021} = 1845^{2020} \cdot 1845$ și $1845 = 1681 + 100 + 64 = 41^2 + 10^2 + 8^2$. Astfel $1845^{2021} = (1845^{1010} \cdot 41)^2 + (1845^{1010} \cdot 10)^2 + (1845^{1010} \cdot 8)^2$.

E:16128. *Determinați numerele naturale* n *pentru care numerele* $2^n + 3^n$, $2^n + 3^{n+1}$, $2^n + 3^{n+2}$, $2^n + 3^{n+3}$ *sunt simultan prime.*

Ionel Tudor, Argeș

Soluție. Pentru $n = 0$, $2^n + 3^{n+1} = 4$, deci nu convine, iar pentru $n = 1$, $2^n + 3^n = 5$, $2^n + 3^{n+1} = 11$, $2^n + 3^{n+2} = 29$, $2^n + 3^{n+3} = 83$ sunt prime.