Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VII-a

Problema 1. Determinaţi partea întreagă a numărului

$$N=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}.$$

* * *

Soluţie:

Observăm că pentru orice număr natural nenul k are loc identitatea $1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}=1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}-2\cdot\frac{1}{k(k+1)}+2\cdot\frac{1}{k}-2\cdot\frac{1}{k+1}==\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2$. **4p**

Aplicând succesiv identitatea de mai sus pentru $k\in\{2,3,\ldots,2022\}$, apoi adunând, obţinem $N=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+1+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}==2021+\frac{1}{2}-\frac{1}{2023}$. **2p**

Partea întreagă a numărului N este 2021. **1p**

ViitoriOlimpici.ro

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VII-a

Problema 2. Considerăm triunghiul ABC cu $\sphericalangle A = 20^\circ$ şi $\sphericalangle C = 40^\circ$. Mediatoarea laturii (BC) intersectează dreapta AB în N, iar mediatoarea segmentului (AN) intersectează dreapta AC în E. Determinaţi $\sphericalangle BEN$.

Adrian Bud, Negreşti-Oaş
Viitori Olimpici, etapa a 6-a

Soluţie:

Unghiul $\sphericalangle CBN$ este exterior triunghiului CBA, deci $\sphericalangle CBN = 20^\circ + 40^\circ$ şi, cum $NB = NC$, deducem că triunghiul CBN este echilateral (1). **2p**

Unghiul $\sphericalangle CEN$ este exterior triunghiului isoscel AEN, deci $\sphericalangle CEN = 2 \cdot 20^\circ = 40^\circ$. Apoi $\sphericalangle ECN = \sphericalangle ECB + \sphericalangle BCN = 40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$ şi astfel $\sphericalangle CNE = 180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ = \sphericalangle CEN$, deci triunghiul ECN este isoscel. **3p**

Atunci $EC = CN$, din relaţia (1) $CN = CB$, aşadar $EC = CB$, de unde triunghiul ECB este isoscel. **1p**

Prin urmare $\sphericalangle BEC = \dfrac{1}{2} \cdot (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$ şi obţinem $\sphericalangle BEN = \sphericalangle BEC - \sphericalangle CEN = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$. **1p**

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VII-a

Problema 3. Fie un triunghi ABC şi un punct K pe latura BC. Dreapta AK intersectează cercul A-exînscris triunghiului ABC în punctele P şi Q astfel încât P este între A şi Q, iar CS este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACP$, cu S interior segmentului AK. Ştiind că dreptele CS şi CQ sunt perpendiculare, dreptele CS şi AB se intersectează în T, iar dreptele TQ şi BP se intersectează în R, demonstraţi că dreptele AR, PT şi BS sunt concurente.

Teodora Costea, Rareş Biteş, elevi, Constanţa

Gazeta Matematică nr. 5/2022

Soluţie:

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul ABP cu transversala $T - R - Q$ obţinând $\frac{PR}{RB} \cdot \frac{BT}{TA} \cdot \frac{AQ}{QP} = 1(1)$. **2p**

Din teorema bisectoarei aplicată pentru bisectoarea interioară CS a unghiului $\sphericalangle PCA$ al triunghiului PCA reiese că $\frac{SA}{SP} = \frac{CA}{CP}(2)$. **1p**

Stiind că dreptele CS şi CQ sunt perpendiculare, rezultă că CQ este bisectoarea unghiului adiacent suplementar unghiului $\sphericalangle PCA$ al triunghiului PCA, deci bisectoare exterioară. Aplicând teorema bisectoarei exterioare obţinem $\frac{CA}{CP} = \frac{AQ}{QP}(3)$. **2p**

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă că $\frac{SA}{SP} = \frac{AQ}{QP}$. **1p**

Înlocuind în relaţia (1) raportul $\frac{AQ}{QP}$ obţinem $\frac{PR}{RB} \cdot \frac{BT}{TA} \cdot \frac{AS}{SP} = 1$. Astfel, cum punctele R, T, S sunt interioare laturilor PB, BA, AP ale triunghiului ABP, aplicând reciproca teoremei lui Ceva deducem concurenţa dreptelor AR, BS şi PT. **1p**