ViitoriOlimpici.ro

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VIII-a

Problema 1. Fie numerele reale nenule a şi b şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Arătaţi că, dacă $f(1)$ şi $f(\sqrt{3})$ sunt numere raţionale, atunci $f(1 + \sqrt{3})$ este număr iraţional.

Gazeta Matematică

Soluţie şi barem

Din ipoteză avem $a + b \in \mathbb{Q}$ şi $a\sqrt{3} + b \in \mathbb{Q}$, deci $a(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{Q}$. .... **2 puncte**
Cum a este nenul şi $\sqrt{3} - 1$ este iraţional, rezultă că a este iraţional. .... **2 puncte**
Prin urmare, $f(1 + \sqrt{3}) = (a\sqrt{3} + b) + a$ este iraţional. .... **3 puncte**

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VIII-a

Problema 2. Fie A, B, C, D puncte necoplanare. Se notează cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor BDC respectiv ADC. Arătați că punctele A, B, H_1, H_2 sunt coplanare dacă și numai dacă sunt conciclice.

Viitori Olimpici

Soluţie şi barem

Dacă punctele sunt conciclice atunci ele sunt coplanare. .... **1 punct**

Reciproc, dacă punctele sunt coplanare și $BH_1 \cap CD = \{T\}$, atunci $\{T\} = (ABH_1) \cap CD$ deci $AH_2 \cap CD = \{T\}$. .... **1 punct**

Triunghiurile H_1TC și DTB sunt asemenea, fiind dreptunghice și $\angle H_1CT = 90° - \angle BDC = \angle DBT$. Prin urmare, $\dfrac{H_1T}{DT} = \dfrac{TC}{TB}$, deci $TH_1 \cdot TB = TC \cdot TD$. .... **2 puncte**

Analog se demonstrează că $TH_2 \cdot TA = TC \cdot TD$, prin urmare $TH_1 \cdot TB = TH_2 \cdot TA$. Din teorema reciprocă a puterii punctului față de cerc rezultă conciclicitatea punctelor A, B, H_1, H_2. **3 puncte**

ViitoriOlimpici.ro

Etapa finală, Ediția a XIII-a, 2022

Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie numerele naturale $m,n \geq 2$. Considerăm toate tabelele de numere reale cu m linii şi n coloane de forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cu proprietatea că suma pătratelor numerelor înscrise în fiecare coloană este egală cu 1, adică:

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 1,\ (\forall)\ j = 1,2,\ldots n.$$

Pentru fiecare linie a unui astfel de tabel, considerăm suma tuturor produselor de câte două numere înscrise pe poziții distincte ale acelei linii, definită astfel:

$$A_i = a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + \cdots + a_{i1}a_{in} + a_{i2}a_{i3} + \cdots + a_{in-1}a_{in},\ (\forall)\ i = 1,2,\ldots m.$$

Pentru fiecare astfel de tabel, notăm cu $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui S?

Ștefan Dumitrescu

Soluţie şi barem

Pentru fiecare două coloane $C_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$ şi $C_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$, aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz, avem:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{mi}a_{mj} \leq \sqrt{a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{mi}^2} \cdot \sqrt{a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2}.$$

Folosind ipoteza, rezultă:

$$a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{mi}a_{mj} \leq 1.$$

. . . . **3 puncte**

Însumând pentru toate perechile (i,j) cu $1 \leq i < j \leq n$, obținem:

$$\sum_{i=1}^{m} A_i \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

. . . . **3 puncte**

Valoarea maximă $S = \dfrac{n(n-1)}{2}$ se obține, de exemplu, pentru $a_{ij} = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$, $(\forall)\ i = 1,2,\ldots m$, $(\forall)\ j = 1,2,\ldots n$. . . . . **1 punct**