Problema 1. Fie numerele reale nenule a şi b şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Arătaţi că, dacă $f(1)$ şi $f(\sqrt{3})$ sunt numere raţionale, atunci $f(1 + \sqrt{3})$ este număr iraţional.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie A, B, C, D puncte necoplanare. Se notează cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor BDC respectiv ADC. Arătați că punctele A, B, H_1, H_2 sunt coplanare dacă și numai dacă sunt conciclice.

Viitori Olimpici

Problema 3. Fie numerele naturale $m,n \geq 2$. Considerăm toate tabelele de numere reale cu m linii şi n coloane de forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

cu proprietatea că suma pătratelor numerelor înscrise în fiecare coloană este egală cu 1, adică:

$$a_{1j}^2 + a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 = 1,\ (\forall)\ j = 1,2,\ldots n.$$

Pentru fiecare linie a unui astfel de tabel, considerăm suma tuturor produselor de câte două numere înscrise pe poziții distincte ale acelei linii, definită astfel:

$$A_i = a_{i1}a_{i2} + a_{i1}a_{i3} + \cdots + a_{i1}a_{in} + a_{i2}a_{i3} + \cdots + a_{in-1}a_{in},\ (\forall)\ i = 1,2,\ldots m.$$

Pentru fiecare astfel de tabel, notăm cu $S = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui S?

Ștefan Dumitrescu