Problema săptămânii 315

Determinaţi toate numerele naturale nenule a, b şi c pentru care există numere naturale nenule x, y şi z astfel încât $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ şi $z! = ca + 1$.

baraj juniori Franţa, 2022

Soluţie:
Fie (a, b, c) un triplet cu proprietatea din enunţ şi x, y, z numere naturale care satisfac relaţiile date. Datorită faptului că aceste relaţii sunt simetrice în a, b, c, putem presupune $a \leq b \leq c$. Atunci $ab \leq ac \leq bc$, deci $x \leq z \leq y$. Rezultă că $x!$ divide atât $y!$ cât şi $z!$. Fie d un divizor al lui $x!$, adică un divizor comun al numerelor $x!$, $y!$ şi $z!$. Atunci

$$ab \equiv bc \equiv ca \equiv -1 \pmod{d},$$

deci $-1 \equiv (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 \pmod{d}$. Dacă $3 \leq x$, atunci putem alege $d = 3$ (puteam să ne uităm direct modulo 3, dar aşa se vede mai bine de ce tocmai modulo 3) şi deducem că $(abc)^2$ este un pătrat congruent cu -1 modulo 3, ceea ce nu se poate. Deducem că $x \leq 2$. Cum $ab + 1 \geq 2 > 1!$, deducem că $x = 2$ şi $a = b = 1$. În fine, c trebuie să fie un număr de forma $n! - 1$, cu $n \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, pentru $a = b = 1$, $c = n! - 1$ putem alege $x = 2$ şi $y = z = n$, deci orice triplet de forma $(1, 1, n! - 1)$ satisface enunţul. Renunţând la condiţia $a \leq b \leq c$ obţinem şi permutările tripletelor de mai sus.

Am primit soluţii de la: *Daniel Văcaru, Lucian Trepteanu, Adrian Miclăuş* şi *Alexandru Ciobotea.*

Problem of the week no. 315

Determine all positive integers a, b, c for which there exist positive integers x, y, z such that $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ and $z! = ca + 1$.

JTST France, 2022

Solution:
Let (a, b, c) be a triple satisfying the requirements and x, y, z positive integers satisfying the given relations. As these relations are symmetric with respect to a, b, c, we may assume that $a \leq b \leq c$. In this case, $ab \leq ac \leq bc$, hence $x \leq z \leq y$. It follows that $x!$ divides both $y!$ and $z!$. Let d be a divisor of $x!$, i.e. a common divisor of $x!$, $y!$ and $z!$. We have

$$ab \equiv bc \equiv ca \equiv -1 \pmod{d},$$

hence $-1 \equiv (ab)(bc)(ca) = (abc)^2 \pmod{d}$. If $3 \leq x$, we may pick $d = 3$ (we could have looked directly modulo 3, but introducing a general d gives a motivation for picking $d = 3$) and deduce that $(abc)^2$ is a perfect square, congruent to -1 modulo 3, which is not possible. It follows that $x \leq 2$. As $ab + 1 \geq 2 > 1!$, we get $x = 2$ and $a = b = 1$. Finally, c needs to be a number of the form $n! - 1$, with $n \in \mathbb{N}$.Conversely, for $a = b = 1$, $c = n! - 1$ we may take $x = 2$ and $y = z = n$, therefore any triple of the form $(1, 1, n! - 1)$ does satisfy the statement. Giving up on the condition $a \leq b \leq c$ we also obtain the permutations of these triples.