Problema săptămânii 314

Aflaţi numerele reale x, y care satisfac relaţiile $x^2 + y^2 = 2$ şi $\dfrac{x^2}{2-y} + \dfrac{y^2}{2-x} = 2$.

Olimpiadă Noua Zeelanda, 2022

Soluţia 1: (*Daniel Văcaru*)

Avem $2 = \dfrac{x^2}{2-y} + \dfrac{y^2}{2-x} = \dfrac{4-(x^3+y^3)}{4-2(x+y)+xy}$ și $(x+y)^2 - 2xy = 2$. Notând $s \overset{\text{not}}{=} x+y$ și $p \overset{\text{not}}{=} xy$, după înlocuiri obținem ecuația

$$\frac{4 - s(s^2 - 3p)}{4 - 2s + p} = 2$$

de unde, înlocuind $2p = s^2 - 2$, rezultă $s^3 - 2s^2 + 2s - 4 = 0 \Leftrightarrow s^2(s-2) + 2(s-2) = 0 \Leftrightarrow (s-2)(s^2+2) = 0$. Urmează că $s = 2$ și $p = 1$, de unde $x = y = 1$.

Soluţia 2: Înlocuind $y^2 = 2 - x^2$, a doua relaţie se scrie $\dfrac{x^2}{2-y} = 2 - \dfrac{2-x^2}{2-x}$. De aici se obţine $y = \dfrac{4-4x+x^3}{2-2x+x^2}$. Înlocuind în prima relaţie şi aducând la acelaşi numitor se obţine că x trebuie să satisfacă ecuaţia $2x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 16x + 8 = 0$. Aceasta din urmă se scrie $2(x-1)^2(x^4 - 2x^2 + 4) = 0$. Deoarece $x^4 - 2x^2 + 4 = (x^2-1)^2 + 3 > 0$, deducem că $x = 1$, apoi că $y = 1$, pereche care satisface într-adevăr ambele ecuaţii din enunţ.

Comentarii: 1. Ideea de a exprima expresii simetrice în două variabile în termeni de sumă şi produs (Soluţia 1) este o metodă clasică, deseori utilă.
2. Ghicirea soluţiei $x = y = 1$ ajută la descoperirea descompunerii în factori $2x^6 - 4x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 4x^2 - 16x + 8 = 2(x-1)^2(x^4 - 2x^2 + 4)$ care constituie cheia Soluţiei 2.

Se poate consulta şi soluţia oficială.

Am primit soluţii de la: *Daniel Văcaru, Adrian Zanca, Alexandru Ciobotea, Adrian Miclăus* şi *Lucian Trepteanu.*

Problem of the week no. 314

Determine all pairs of real numbers x, y that satisfy $x^2+y^2 = 2$ and $\dfrac{x^2}{2-y} + \dfrac{y^2}{2-x} = 2$.

New Zealand Mathematical Olympiad, 2022

Solution 1: (*Daniel Văcaru*)
We have $2 = \dfrac{x^2}{2-y} + \dfrac{y^2}{2-x} = \dfrac{4-(x^3+y^3)}{4-2\,(x+y)+xy}$ and $(x+y)^2 - 2xy = 2$. Putting $s \overset{\text{not}}{=} x+y$ and $p \overset{\text{not}}{=} xy$, using $x^2+y^2=2$ we get

$$\frac{4-s\,(s^2-3p)}{4-2s+p} = 2.$$

Plugging $2p = s^2-2$ yields $s^3-2s^2+2s-4=0 \Leftrightarrow s^2\,(s-2)+2\,(s-2)=0 \Leftrightarrow (s-2)\,(s^2+2)=0$. It follows that $s=2$ and $p=1$, hence $x=y=1$.

Solution 2: Plugging $y^2 = 2-x^2$ into the second equation becomes
$\dfrac{x^2}{2-y} = 2 - \dfrac{2-x^2}{2-x}$. Computing for y gives $y = \dfrac{4-4x+x^3}{2-2x+x^2}$.
Plugging this into the first equation and clearing denominators show that x must satisfy the following equation: $2x^6-4x^5-2x^4+8x^3+4x^2-16x+8=0$. This can be factorized $2(x-1)^2(x^4-2x^2+4)=0$. As $x^4-2x^2+4=(x^2-1)^2+3>0$, it follows that $x=1$, then $y=1$. It is easy to check that this pair does indeed satisfy both equations.

You can also read the official solution.