

Problema săptămânii 312

Pe un cerc se află trei puncte roșii, trei puncte galbene și trei puncte albastre astfel încât triunghiurile determinate de cele trei puncte de aceeași culoare să fie ascuțitunghice. Arătați că se pot alege trei puncte, unul roșu, unul galben și unul albastru, astfel încât triunghiul determinat de ele să nu fie obtuzunghic.

Soluție: Considerăm cea mai lungă coardă care unește două puncte de culori diferite. Să zicem că ea unește un punct galben cu unul albastru. Arătăm că punctele situate în capetele ei, împreună cu unul din cele trei puncte roșii, formează un triunghi ascuțitunghic sau dreptunghic. În cazul în care coarda considerată este un diametru, oricare din cele trei puncte roșii determină împreună cu capetele corzii un triunghi dreptunghic.

Dacă nu avem diametru bicolor, coarda cea mai lungă determină două arce de cerc, unul mare și unul mic. Dacă cele trei puncte roșii se află, toate trei, pe arcul mic, unul dintre unghiurile triunghiului roșu ar subîntinde un arc care este mai mare decât arcul mare determinat de coarda aleasă, deci triunghiul roșu ar fi obtuzunghic. Așadar, cel puțin unul dintre punctele roșii trebuie să se afle pe arcul mare. Acesta, împreună cu capetele corzii alese determină un triunghi tricolor, în care latura cea mai lungă este coarda aleasă, deci unghiul cel mai mare este cel cu vârful roșu. Acesta subîntinde arcul mic determinat de coarda aleasă, deci este unghi ascuțit, prin urmare triunghiul ales este ascuțitunghic.

Am primit soluție numai de la *Daniel Văcaru*.

Problem of the week no. 312

We have a red, a blue and a yellow acute triangle with the same circumcircle. Prove that one can choose one red, one blue and one yellow vertex such that this triangle has no obtuse angle.

Solution: Consider the longest chord that joins two points of different color. Say its endpoints are blue and yellow. We prove that these two points, together with some red point, are the vertices of a triangle that is either acute or right. If the longest chord is a diameter, pick any red point: the resulting triangle is a right one.

If the chosen chord is not a diameter, it determines on the circle two arcs, a large one and a small one. If the three red points are all situated on the smaller arc, then one of the angles of the red triangle subtends an arc larger than the larger arc determined by the chosen chord. But this means that the red triangle is obtuse, which contradicts the hypothesis. Therefore there has to be a red point on the larger arc. Choose one such point. Together with the endpoints of the chosen chord it determines an acute triangle. Indeed, the sides of the triangle join points of two different color, so the longest side of the triangle is the chosen chord. The angle in the red vertex subtends the smaller arc determined by the chosen chord, so this angle is acute. This is the largest angle of the triangle, therefore the triangle is acute.