Problema săptămânii 311

Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $\left(x^3-y^2\right)^2=\left(x^2-y^3\right)^2$.

Szalai Máté, Revista KöMaL, 2020

Soluţie: (*Daniel Văcaru*)
Obţinem că fie $x^3-y^2=x^2-y^3 \quad (1)$, fie $x^3-y^2=-x^2+y^3 \quad (2)$.
Ecuaţia (2) este echivalentă cu

$$x^3+x^2=y^3+y^2.$$

Obţinem $x^3-y^3+x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2+xy+y^2+x+y\right)=0$; rezultă că $x=y$ sau $x^2+x(y+1)+y^2+y=0$. Această ecuaţie de gradul II în x are $\Delta=(y+1)^2-4y(y+1)=(y+1)(-3y+1)$. Dacă $y\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{3},\infty)$, atunci $\Delta<0$. Rămâne că $y\in\{-1,0\}$ şi se găseşte $x=0$ dacă $y=-1$ şi $x=0$ sau $x=-1$ dacă $y=0$. Obţinem soluţiile

$$\{(k,k)\,,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(0,-1),(0,0),(-1,0)\}.$$

Pentru ecuaţia (1), avem $x^3+y^3=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=(x+y)^2-2xy$.
Notând $x+y\overset{\text{not}}{=}S,\ x\cdot y\overset{\text{not}}{=}P$, găsim

$$S\left(S^2-3P\right)=S^2-2P \Leftrightarrow S^3-S^2=3PS-2P \Leftrightarrow P=\frac{S^3-S^2}{3S-2}\in\mathbb{Z}.$$

Rezultă că $27P\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\frac{27S^3-27S^2}{3S-2}=\frac{27S^3-18S^2-9S^2+6S-6S+4-4}{3S-2}=9S^2-3S-2-\frac{4}{3S-2}\in\mathbb{Z}$$

Obţinem $3S-2\in\{-4,-2,-1,1,2,4\} \Leftrightarrow 3S\in\{-2,0,1,3,4,6\}$. Singurele valori convenabile sunt $S=0,\ S=1,\ S=2$. Pentru ele obţinem $P=0,\ P=0$, respectiv $P=1$.
Obţinem $x=0,y=0$, în cazul $S=0,P=0$, $x=1,y=0$ şi $x=0,y=1$ în cazul $S=1,P=0$ şi $x=1,y=1$ în cazul $S=2,P=1$.
Aşadar, pentru ecuaţia (1) avem soluţiile

$$\{(0,1),(1,0),(0,0)\,,(1,1)\}.$$

În concluzion, soluţiile sunt $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$ şi (k,k), cu $k\in\mathbb{Z}$.

Problem of the week no. 311

Determine all pairs of integers (x,y) that satisfy the equation $\left(x^3-y^2\right)^2=\left(x^2-y^3\right)^2$.

Szalai Máté, KöMaL, 2020

Solution: (*Daniel Văcaru*)
We obtain $x^3 - y^2 = x^2 - y^3 \quad (1)$ or $x^3 - y^2 = -x^2 + y^3 \quad (2)$.
But (2) is equivalent to

$$x^3 + x^2 = y^3 + y^2.$$

We obtain $x^3 - y^3 + x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + x + y) = 0$; we find $x = y$, or $x^2 + x(y + 1) + y^2 + y = 0$. This quadratic equation in variable x has $\Delta = (y+1)^2 - 4y(y+1) = (y+1)(-3y+1)$. We observe that if $y \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$, then $\Delta < 0$. It follows that $y \in \{-1, 0\}$ and $x = 0$ for $y = -1$, and $x = 0$ or $x = -1$ for $y = 0$. We obtain solutions

$$\{(k,k), k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(0,-1), (0,0), (-1,0)\}.$$

For (1), we have $x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)^2 - 2xy$
Denoting $x + y \overset{\text{not}}{=} S,\ x \cdot y \overset{\text{not}}{=} P$, we find

$$S\left(S^2 - 3P\right) = S^2 - 2P \Leftrightarrow S^3 - S^2 = 3PS - 2P \Leftrightarrow P = \frac{S^3 - S^2}{3S - 2} \in \mathbb{Z}.$$

It follows that $27P \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$$\frac{27S^3 - 27S^2}{3S - 2} = \frac{27S^3 - 18S^2 - 9S^2 + 6S - 6S + 4 - 4}{3S - 2} = 9S^2 - 3S - 2 - \frac{4}{3S - 2} \in \mathbb{Z}$$

We obtain $3S - 2 \in \{-4, -2, -1, 1, 2, 4\} \Leftrightarrow 3S \in \{-2, 0, 1, 3, 4, 6\}$. The only admissible values are $S = 0,\ S = 1,\ S = 2$. It follows $P = 0,\ P = 0,\ P = 1$, respectively. We obtain $x = 0, y = 0$, for $S = 0, P = 0$, $x = 1, y = 0$ and $x = 0, y = 1$ for $S = 1, P = 0$ and $x = 1, y = 1$ for $S = 2, P = 1$.
For equation (1) we get

$$\{(0,1), (1,0), (0,0), (1,1)\}.$$

In conclusion, the solutions are $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$ and (k, k), with $k \in \mathbb{Z}$.