**Problema săptămânii 310**

Fie $a, b, c \in [1, \infty)$. Demonstraţi că

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1) \geq 2abc - 1.$$

**Soluţia 1:** (*Titu Zvonaru*)
Fie $x, y, z \geq 0$ astfel încât $a = 1 + x$, $b = 1 + y$, $c = 1 + z$. Inegalitatea revine la $(2x+1)(2y+1)(2z+1) \geq 2(x+1)(y+1)(z+1)-1$, $\forall\, x, y, z \geq 0$, adică, după calcule, $6xyz + 2(xy + yz + zx) \geq 0$, ceea ce este evident.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă cel puţin două dintre variabilele $x, y, z$ sunt egale cu 0, adică atunci când cel puţin două dintre numerele $a, b, c$ sunt egale cu 1.

**Soluţia 2:**
Vom arăta că dacă $x, y \geq 1$, atunci $(2x-1)(2y-1) \geq 2xy - 1$. Într-adevăr, inegalitatea de mai sus revine la $2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0$, adică la $2(x-1)(y-1) \geq 0$.
Egalitate în această inegalitate avem dacă $x = 1$ sau $y = 1$.

Folosind inegalitatea de mai sus şi faptul că $ab \geq 1$, avem $(2a-1)(2b-1)(2c-1) \geq (2ab-1)(2c-1) \geq (2ab \cdot c - 1) = 2abc - 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = 1$ sau $b = 1$ şi, în plus, $ab = 1$ sau $c = 1$. Aşadar, egalitate avem dacă şi numai dacă cel puţin două dintre numerele $a, b, c$ sunt egale cu 1.

Analog, prin inducţie, se arată uşor că

$$(2a_1-1)(2a_2-1)\cdots(2a_n-1) \geq 2a_1a_2\cdots a_n - 1, \qquad \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1.$$

**Soluţia 3:** (*Daniel Văcaru*)
Scriem inegalitatea echivalent

$$(4ab - 2a - 2b)c - (2a-1)(2b-1) + 1 \geq 0$$

Să privim membrul stâng ca o funcţie de gradul I în $c$, $f_c(x)$. Acum să ne uităm la coeficientul său ca la o funcţie

$$f_a : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f_a = 4ab - 2a - 2b = 2b(2a-1) - 2a$$

Este clar că funcţia $f_a$ este o funcţie crescătoare, aşadar

$$f_a(b) \geq f_a(1) = 2a - 1 \geq 0.$$

Obţinem $f_c(c) = (4ab - 2a - 2b)\,c - (2a-1)(2b-1) + 1 \geq f_c(1) = 4ab - 2a - 2b - (2a-1)(2b-1) + 1 = 0$, de unde afirmaţia.

**Soluţia 4:** (*Adrian Zanca, Ştefan Gobej*)
Desfăcând parantezele şi împărţind la 2, inegalitatea de demonstrat revine la $3abc - 2(ab+bc+ca) + a + b + c \geq 0$. Acesta din urmă se poate scrie echivalent $a(b-1)(c-1) + b(c-1)(a-1) + c(a-1)(b-1) \geq 0$, inegalitate evident adevărată, fiecare din

cei trei termeni fiind nenegativ.

Am primit soluţii de la: *Titu Zvonaru, Daniel Văcaru, Adrian Zanca* şi *Ştefan Gobej.*

**Problem of the week no. 310**

If $a, b, c \in [1, \infty)$, prove that

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1) \geq 2abc - 1.$$

**Solution 1:** (*Titu Zvonaru*)
Consider $x, y, z \geq 0$ such that $a = 1 + x$, $b = 1 + y$, $c = 1 + z$. The inequality reduces to $(2x+1)(2y+1)(2z+1) \geq 2(x+1)(y+1)(z+1) - 1$, $\forall\, x, y, z \geq 0$, i.e., after some computations, to $6xyz + 2(xy + yz + zx) \geq 0$, which is obvious.
Equality holds if and only if at least two of the variables $x, y, z$ are 0, i.e. when at least two of the variables $a, b, c$ are 1.

**Solution 2:**
First, we prove that $(2x-1)(2y-1) \geq 2xy - 1$, for all $x, y \geq 1$.
Indeed, the previous inequality can be written $2xy - 2x - 2y + 2 \geq 0$, i.e.
$2(x-1)(y-1) \geq 0$. This inequality is satisfied with equality if $x = 1$ or $y = 1$.

Using the inequality we have proven above and the fact that $ab \geq 1$, we have $(2a-1)(2b-1)(2c-1) \geq (2ab-1)(2c-1) \geq (2ab \cdot c - 1) = 2abc - 1$, with equality if $a = 1$ or $b = 1$ and, moreover, $ab = 1$ or $c = 1$. Thus, equality holds when at least two of the variables $a, b, c$ are equal to 1.

Similarly, by induction, it is easy to prove that

$$(2a_1-1)(2a_2-1)\cdots(2a_n-1) \geq 2a_1a_2\cdots a_n - 1, \qquad \forall\, a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 1.$$

**Solution 3:** (*Daniel Văcaru*)
Rewrite the inequality as

$$(4ab - 2a - 2b)c - (2a-1)(2b-1) + 1 \geq 0$$

and let us treat the expression on the LHS as a function of degree I of variable $c$, $f_c$. Let us treat its leading coefficient as a function of variable $a$,

$$f_a : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f_a = 4ab - 2a - 2b = 2b\,(2a-1) - 2a$$

Clearly $f_a$ is an increasing function, hence

$$f_a\,(b) \geq f_a\,(1) = 2a - 1 \geq 0.$$

Thus, $f_c(c) = (4ab - 2a - 2b)\,c - (2a-1)\,(2b-1) + 1 \geq f_c(1) = 4ab - 2a - 2b - (2a-1)\,(2b-1) + 1 = 0$, which proves the statement.

**Solution 4:** (*Adrian Zanca, Ştefan Gobej*)
Expanding and dividing by 2, our inequality becomes

$$3abc - 2(ab + bc + ca) + a + b + c \geq 0.$$

This inequality can be written equivalently

$$a(b-1)(c-1) + b(c-1)(a-1) + c(a-1)(b-1) \geq 0,$$

which is clearly true, each of the three terms being non-negative.