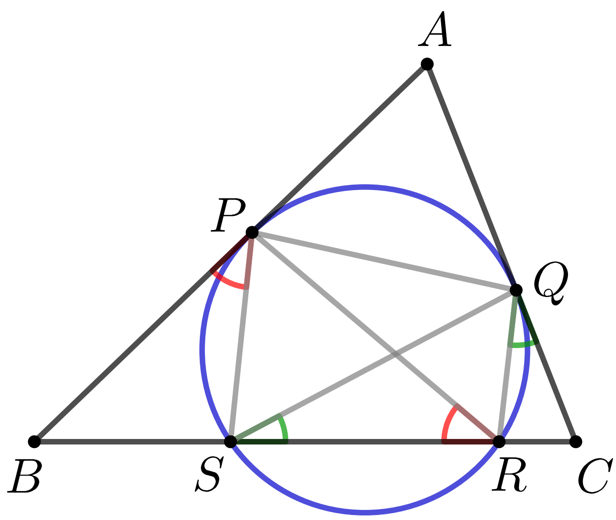
Problema săptămânii 309

Fiind dat un triunghi ABC, se consideră punctele P şi Q pe laturile (AB), respectiv (AC) astfel încât $AP = AQ$. Fie S şi R puncte distincte pe latura (BC) astfel încât S se află între B şi R, $\sphericalangle BPS \equiv \sphericalangle PRS$ şi $\sphericalangle CQR \equiv \sphericalangle QSR$. Demonstraţi că punctele P, Q, R şi S sunt conciclice.

USAJMO, 2012

Soluţie: Începem prin a observa că egalităţile de unghiuri din enunţ arată că AB este tangentă cercului circumscris triunghiului PSR şi că AC este tangentă cercului circumscris triunghiului QSR. Dorim să arătăm că cele două cercuri coincid.
Presupunem contrariul. Cele două cercuri se intersectează în R şi S, deci axa lor radicală este dreapta RS. Pe de altă parte, puterea punctului A faţă de cele două cercuri este AP^2, respectiv AQ^2. Însă $AP = AQ$ arată că A are puteri egale faţă de cele două cercuri, deci că A se află pe axa radicală a acestora. Am obţinut că $A \in RS$, contradicţie.
Aşadar, presupunerea făcută este falsă, deci cele două cercuri coincid, adică punctele P, Q, R, S sunt conciclice.



Am primit soluţie de la *Ştefan Gobej*.

Problem of the week no. 309

Given a triangle ABC, let P and Q be points on segments AB and AC, respectively, such that $AP = AQ$. Let S and R be distinct points on segment BC such that S lies between B and R, $\sphericalangle BPS = \sphericalangle PRS$, and $\sphericalangle CQR = \sphericalangle QSR$. Prove that P, Q, R and S are concyclic.

USAJMO, 2012

Solution: We start by noticing that the angular relations given in the statement mean that line AB is tangent to the circumcircle of triangle PSR and line AC is tangent to the circumcircle of triangle QSR. We wish to prove that the two circle coincide.

Let us assume that they do not. The two circles intersect at R and S, which means that their radical axis is the line RS. On the other hand, the power of point A with respect to the two circles is AP^2 and AQ^2, respectively. But $AP = AQ$ shows that A has equal powers with respect to the two circles, which means that A lies on the their radical axis. We have obtained that $A \in RS$, which is a contradiction.

Thus, our assumption led to a contradiction, therefore the two circles must coincide, which means that points P, Q, R, S belong to the same circle.