Problema săptămânii 308

Doi jucători, A şi B, iau alternativ pietre dintr-o grămadă ce conţine iniţial $n \geq 2$ pietre. Începe A care ia între 1 şi $n-1$ pietre din grămadă. În continuare, jucătorul care urmează la mutare ia cel puţin o piatră, dar nu mai multe decât a luat adversarul la mutarea anterioară. Jucătorul care ia ultima piatră câştigă. Care din cei doi jucători are strategie câştigătoare?

Olimpiadă Bulgaria, 1995

Soluţie: Vom nota poziţiile cu perechi de forma (m, k), acest lucru însemnând că jucătorul care urmează la mutare găseşte pe masă m pietre şi are voie să ia cel mult k pietre. O observaţie evidentă este că dacă (a, b) este poziţie pierzătoare, atunci şi (a, c) cu $c < b$ e tot pierzătoare.

Dacă n este impar, A câştigă: ia la început o piatră; de aici înainte fiecare jucător e obligat să ia mereu o piatră, iar A o va lua pe ultima.

Dacă $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \neq 2$, A câştigă: ia la început două pietre. Dacă se continuă cu câte 2 pietre, A ia ultimele două şi câştigă. Dacă B ia vreodată o sngură piatră, el lasă număr impar, iar de acolo, am văzut, câştigă A.

Dacă $n = 2$, e uşor de văzut că B câştigă.

Dacă $n \equiv 4 \pmod 8$, $n \neq 4$, câştigă A luând 4 pietre. Dacă se continuă până la final cu 4, A ia ultimul grup de 4 şi câştigă. Dacă B ia vreodată 1, 2 sau 3 pietre, el lasă un număr de pietre care este fie impar, fie $\equiv 2 \pmod 4$ (şi mai mare ca 4), deci de acolo A câştigă.

Pentru $n = 4$ se constată uşor că B câştigă.

Scriindu-l pe $n = 2^k(2j+1)$, din cele de mai sus intuim că poziţia (n, t) este câştigătoare dacă $t \geq 2^k$ şi este pierzătoare dacă $t < 2^k$.

Fie $\mathscr{L} = \{(2^k(2j+1), t) \mid t < 2^k\} \cup \{(0, a) \mid a \in \mathbb{N}^*\}$. (Vrem să arătăm că această mulţime este tocmai mulţimea poziţiilor pierzătoare.) Arătăm că această mulţime îndeplineşte următoarele trei condiţii:

• Toate poziţiile finale sunt în $\mathscr{L}$.

Într-adevăr, poziţiile finale sunt de forma $(0, a) \in \mathscr{L}$.

• Dintr-o poziţie din $\mathscr{L}$ nu există mutare către o altă poziţie din $\mathscr{L}$.

Într-adevăr, din $(0, a)$ nu există niciun fel de mutare.

Din $(2^k(2j+1), t)$ cu $t < 2^k$ nu se poate muta într-un multiplu de 2^k, deci se poate muta numai într-un $2^u(2s+1)$ cu $u < k$. Numărul de pietre luate este divizibil cu 2^u, deci mai mare sau egal cu 2^u, deci poziţia obţinută este de forma $(2^u(2s+1), t')$ cu $t' \geq 2^u$, prin urmare ea nu aparţine lui $\mathscr{L}$.

• Din orice poziţie care nu aparţine lui $\mathscr{L}$ există o mutare către o poziţie din $\mathscr{L}$.

Din orice poziţie de forma (a, b) cu $b \geq a > 0$ se poate muta în $(0, a) \in \mathscr{L}$.

Din orice poziţie de forma $(2^k(2j+1), t)$ cu $t \geq 2^k$ se pot lua 2^k pietre şi ajunge la $(2^{k+1} \cdot j, 2^k) \in \mathscr{L}$.

În concluzie, dintre poziţiile de forma $(n, n-1)$ din care începe jocul, cele pierzătoare sunt pentru $n = 2^k$. Aşadar, pentru $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}^*$, câştigă B, în rest câştigă A. (Strategia câştigătoare este aceea de a-l lăsa pe adversar mereu într-o poziţie din $\mathscr{L}$.)

Am primit soluţii de la *Emanuel Mazăre* şi *Ştefan Gobej*.

Problem of the week no. 308

Two players A and B take stones one after the other from a heap with $n \geq 2$ stones. A begins the game and takes at least one stone, but no more than $n-1$ stones. Thereafter, a player on turn takes at least one, but no more than the other player has taken before him. The player who takes the last stone wins. Which of the players has a winning strategy?

Bulgarian Olympiad, 1995

Solution: We denote the positions by pairs (m, k), meaning that the player on turn finds m stones on the table and may take at most k stones.
If n is odd, A wins: he takes one stone; from now on, both players are obliged to take one stone; as n is odd, A will take the last stone.
If $n \equiv 2 \pmod 4$, $n \neq 2$, A wins: on his first move A takes two stones. If B continues to take two stones, B will take the last pair of stones. If at some point B takes one stone, he leaves an odd number of stones and from there, as we have seen, A wins.
Clearly, for $n = 2$ B wins.
If $n \equiv 4 \pmod 8$, $n \neq 4$, A wins by taking 4 stones on his first move. If the two players continue removing 4 stones each, B will take the last group of 4 and he will win. If at some point B takes 1 ore 3 stones, he leaves an odd number of stones and A wins. If at some point B takes 2 stones, he leaves a number of stones that is $\equiv 2 \pmod 4$ (and larger than 4), and A wins again.
For $n = 4$ it is easy to see that B wins.
Writing $n = 2^k(2j+1)$, with $k, k \in \mathbb{N}$, from the above it is easy to guess that the position (n, t) is winning if $t \geq 2^k$ and losing if $t < 2^k$.
Consider the set $\mathscr{L} = \{(2^k(2j+1), t) \mid t < 2^k\} \cup \{(0, a) \mid a \in \mathbb{N}^*\}$. We wish to prove that this set is precisely the set of the losing positions. It needs to fulfill the following three properties:
• All the final positions of the game belong to $\mathscr{L}$.
Indeed, the final positions are $(0, a) \in \mathscr{L}$.
• From a position belonging to $\mathscr{L}$ there is no move towards another position belonging to $\mathscr{L}$.
Indeed, from $(0, a)$ there is no move whatsoever.
From $(2^k(2j+1), t)$ with $t < 2^k$ one can not move into a position with a number of stones multiple of 2^k, hence there are only move towards $2^u(2s+1)$ with $u < k$. The number of stones taken in this move is a multiple of 2^u, therefore it is at least 2^u, which means that it lead to a position $(2^u(2s+1), t')$ with $t' \geq 2^u$, i.e. a position not belonging to $\mathscr{L}$.
• From every position not belonging to $\mathscr{L}$ there exists a move towards a position belonging to $\mathscr{L}$.
From $(2^k(2j+1), t)$ with $t \geq 2^k$ one can take 2^k stones and leave the position

$(2^{k+1} \cdot j, 2^k) \in \mathscr{L}$.

In conclusion, from all the initial positions of the form $(n, n-1)$, te losing ones are those with $n = 2^k$. Thus, for $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, B wins, in all other cases A wins. (The strategy in both cases being to always leave a position belonging to $\mathscr{L}$.)