Problema săptămânii 307

În fiecare din vârfurile unui cub se scrie un număr întreg. O mutare constă din alegerea unui vârf şi din adunarea numărului scris în acest vârf la numărul scris într-unul din vârfurile adiacente vârfului ales. (Mai precis: dacă alegem un vârf în care este scris numărul x, iar într-unul din vârfurile adiacente acestuia este scris numărul y, putem înlocui numărul y cu $x+y$.) Arătaţi că există o succesiune finită de mutări care fac ca numerele scrise în cele 8 vârfuri să fie congruente modulo 2022.

Soluţia 1: Să observăm pentru început că nu contează numerele scrise în vârfuri ci numai resturile lor la împărţirea cu 2022. O a doua observaţie este că dacă repetăm operaţia din enunţ de 2021 de ori, efectul este că numărul y este înlocuit cu $y + 2021x \equiv y - x \pmod{2022}$. Dispunem, aşadar, de o ,,supermutare" care permite înlocuirea numărului y scris într-un anumit vârf cu numărul $y - x$, unde x este numărul scris într-unul din vârfurile adiacente. În continuare, vom înlocui mereu fiecare număr scris într-un vârf cu acela dintre numerele $1, 2, 3, \ldots, 2022$ cu care este congruent modulo 2022. Astfel, câtă vreme mai există numere diferite, deci şi numere diferite aflate în vârfuri adiacente, efectuăm o supermutare prin care din numărul mai mare îl scădem pe vecinul său mai mic. Astfel, suma numerelor scrise în cele 8 vârfuri scade mereu. Dar suma respectivă este mereu minim 8, deci nu poate scădea la nesfârşit, prin urmare la un moment dat ea nu mai scade, ceea ce înseamnă că se ajunge la situaţia în care, modulo 2022, toate numerele sunt egale.

Remarcă: A fost foarte important să lucrăm cu $1, 2, 3, \ldots, 2022$ şi nu cu resturile $0, 1, 2, \ldots, 2021$, deoarece pentru resturi nu mai este întotdeauna adevărat că o supermutare scade suma numerelor (scăderea restului 0 nu o scade).

Soluţia 2: Ne bazăm pe cele două observaţii de la începutul soluţiei 1. Înlocuim fiecare număr cu restul la împărţirea cu 2022. Uitându-ne la o pereche de numere scrise în vârfuri adiacente şi făcând supermutări asupra celor două numere, putem replica algortitmul lui Euclid până ce cele două numere devin egale cu cel mai mare divizor comun al lor. Dispunem, aşadar, de o ,,super-supermutare": înlocuirea a două numere vecine cu c.m.m.d.c-ul lor. Începem prin a ne uita la 4 muchii paralele ale cubului (de exemplu cele verticale) şi efectuăm super-supermutări asupra acestora. Efectul este că faţa de sus şi cea de jos devin identice. Ne uităm acum la alte 4 muchii paralele, de pildă cele care unesc faţă din faţă cu cea din spate. Efectuăm super-supermutări (nu uităm că pe muchiile de sus avem aceleaşi numere ca şi pe cele de sub ele). Efectul super-supermutărilor este că de-acum numerele de pe faţa din stânga sunt egale şi la fel şi cele de pe faţa din dreapta. În fine, ne uităm la cele 4 muchii (paralele între ele) care unesc faţa din stânga cu cea din dreapta şi efectuăm super-supermutări. Astfel, toate numerele devin egale.

Am primit soluţie de la *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 307

At each corner of a cube, an integer is written. A move consists in picking any corner of the cube and adding the value written at that corner to the value written at some adjacent corner (that is, pick a corner with some value x written at it, and an adjacent corner with some value y written at it, and replace y by $x+y$). Prove that there is a finite sequence of moves that make the eight integers written in the vertices of the cube all equal modulo 2022.

Solution 1: Let us begin by noticing that the numbers written in the vertices do not really matter, only matters their remainder when divided by 2022. Our second essential remark is that the effect of repeating the move shown in the statement 2021 times is that the numbers y is replaces by $y + 2021x \equiv y - x \pmod{2022}$. Thus, we have at our disposal, a "supermove" that allows replacing of the number y written in a certain vertex of the cube with the number $y-x$, where x is the number written in an adjacent vertex. In the sequel, we shall always replace a number by one of the numbers $1, 2, 3, \ldots, 2022$, namely the one congruent to it modulo 2022. Thus, as long there are unequal numbers, hence also adjacent unequal numbers, we perform a supermove subtracting the smaller number from the larger one. In doing so, the sum of the numbers written in the 8 vertices always decreases. But the sum cannot become less than 8, which means it cannot decrease forever. In conclusion, eventually one gets to the situation in which the sum no longer decreases, which means all numbers are equal.

Remark: It was essential to work with $1, 2, 3, \ldots, 2022$ instead of the (more natural) remainders modulo 2022: $0, 1, 2, \ldots, 2021$, because for the remainders it is not always true that a supermove diminishes the sum (subtracting 0 doesn't).

Solution 2: We shall use again the two remarks made at the beginning of the first solution. This time, we replace each number by its remainder modulo 2022. Looking at a pair of numbers written in two adjacent vertices and making supermoves on these two numbers, we can replicate the steps of Euclid's algorithm until the two numbers become equal to their greatest common divisor. Thus, we have at our disposal a super-supermove that allows replacing two neighboring numbers with their g.c.d.

We start by looking at 4 parallel edges of the cube, for example the ones connecting the upper face with the bottom face. We perform super-supermoves to these edges. The result is that the top face and the bottom face become equal. Next we perform super-supermove on the 4 (parallel) edges the connect the front face with the rear face. The effect is that all the numbers on the leftmost face are equal and so are the ones on the rightmost face. Finally, 4 super-supermoves performed on the 4 edges joining these two faces make all the numbers equal.