SOLUȚIE

Problema 1.

Într-un joc pe computer, avem o pistă formată din pătrățele unitate, de lungime $4n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Jucătorul pleacă din pătrățelul 1 și se mișcă întotdeauna înainte, după următoarele reguli:

- din pătrățelele de forma $4a$, $4a+1$, $4a+3$, poate sări în pătrățelul vecin sau în pătrățelul situat la distanța 2;
- în pătrățelele de forma $4a+2$ se află *lipici*, iar jucătorul nu se poate deplasa decât în pătrățelul vecin.

În câte moduri se poate ajunge din pătrățelul 1 în pătrățelul $4n$?

Ștefan-Ionel Dumitrescu

Soluţie.

Vom asocia fiecărui pătrățel în parte un număr $K(p)$ reprezentând numărul de moduri în care se poate ajunge în pătrățelul p, plecând din pătrățelul 1 și respectând regulile jocului.

Pentru $p \not\equiv 0 \pmod 4$ și $p \geq 3$, putem scrie că:

$$K(p) = K(p-1) + K(p-2).$$

Pentru $p \equiv 0 \pmod 4$ și $p \geq 4$, avem că $p-2 \equiv 2 \pmod 4$ (adică este un pătrat cu *lipici*), deci:

$$K(p) = K(p-1).$$

Mai departe, pentru un $1 \leq a \leq n$ oarecare, notând $K(4a) = x$, avem:

$$K(4a+1) = K(4a-1) + K(4a) = 2K(4a) = 2x,$$

$$K(4a+2) = K(4a) + K(4a+1) = x + 2x = 3x,$$
$$K(4a+3) = K(4a+1) + K(4a+2) = 2x + 3x = 5x,$$
$$K(4a+4) = K(4a+3) = 5x = 5K(4a).$$

Inductiv, rezultă:

$$K(4n) = K(4) \cdot 5^{n-1}, \forall n \geq 1.$$

Cum $K(4) = 2$, răspunsul final este:

$$K(4n) = 2 \cdot 5^{n-1}.$$

SOLUȚIE

Problema 2.
Spunem că perechea de numere reale nenule (a, b) este *interesantă* dacă $a + b$ şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sunt numere întregi nenule.

1. Arătaţi că există o infinitate de *perechi interesante*.

2. Determinaţi *perechile interesante* (a, b) cu proprietatea că cel puţin unul dintre numerele a^2 şi b^2 este raţional.

Aurel Bârsan

Soluţie.

1. De exemplu, mulţimea

$$\left\{(k + \sqrt{k^2 - 1}, k - \sqrt{k^2 - 1}) \mid k \in \mathbb{N},\ k \geq 1\right\},$$

reprezintă o familie infinită de *perechi interesante*.

2. Fie (a, b) o *pereche interesantă*, astfel ca $a^2 \in \mathbb{Q}^*$ sau $b^2 \in \mathbb{Q}^*$. Avem $ab = (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} \in \mathbb{Q}^*$. Cum unul dintre numerele a^2 şi b^2 este raţional, rezultă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$.

De asemenea, avem $2 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \in \mathbb{Z}^*$.

Notând $k = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \setminus \{-2\}$ şi $t = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$, obţinem $t^2 - kt + 1 = 0$.

Ecuaţia $x^2 - kx + 1 = 0$ are soluţii raţionale dacă şi numai dacă $k^2 - 4$ este un pătrat perfect, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel ca $k^2 - 4 = m^2$. Atunci $(k - m)(k + m) = 4$, de unde obţinem $k = \pm 2$. Cazul $k = -2$ se exclude iar pentru $k = 2$, obţinem $t = \frac{a}{b} = 1$, deci $a = b$.

Rezultă $2a = a + b =: n \in \mathbb{Z}^*$. Atunci $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in \mathbb{Z}^*$, de unde $n \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

În concluzie, perechile *interesante* cu propietatea din enunţ sunt următoarele:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 1), (-1, -1), (2, 2), (-2, -2).$$

SOLUȚIE

Problema 3.
Determinaţi valorile întregi ale lui m pentru care ecuaţia

$$\left[x^2\right] - 2022x + m = 0$$

are un număr impar de soluţii. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.)

***

Soluţie.

Din ipoteză rezultă că $-2022x \in \mathbb{Z}$, prin urmare ecuaţia se scrie

$$\lfloor x^2 - 2022x \rfloor + m = 0.$$

Notăm $y = x - 1011$, deci $x^2 - 2022x = y^2 - 1011^2$. Obţinem ecuaţia echivalentă:

$$\lfloor y^2 \rfloor - 1011^2 + m = 0.$$

Observăm că dacă ecuaţia are soluţia nenulă y, are şi soluţia $-y$, deci avem un număr par de soluţii nenule. Folosind ipoteza rezultă că $y = 0$ este soluţie, prin urmare $m = 1011^2$.

SOLUŢIE

Problema 4.

Fie $ABCD$ un tetraedru şi punctele E, F, G, H, I, J pe laturile AB, BC, CA, CD, AD respectiv DB astfel ca

$$AE \cdot EB = BF \cdot FC = CG \cdot GA = CH \cdot HD = DI \cdot IA = DJ \cdot JB.$$

Arătaţi că punctele E, F, G, H, I, J se află pe o sferă.

Vasile Pop

Soluţie.

Fie O centrul sferei circumscrise tetraedrului şi R raza ei. Construim un plan care trece prin A, B şi O. Acest plan taie sfera după un cerc mare (de rază R). Puterea punctului E faţă de cercul de intersecţie este

$$AE \cdot EB = R^2 - OE^2.$$

Analog, obţinem $BF \cdot FC = R^2 - OF^2$, $CG \cdot GA = R^2 - OG^2$, $CH \cdot HD = R^2 - OH^2$, $DI \cdot IA = R^2 - OI^2$ şi $DJ \cdot JB = R^2 - OJ^2$.

Atunci, pe baza ipotezei, deducem $OE = OF = OG = OH = OI = OJ$, deci punctele se află pe o sferă de centru O.