SOLUŢIE

Problema 1.

În tetraedrul $VABC$, considerăm un punct arbitrar P în interiorul feţei ABC. Paralelele duse prin P la muchiile VA, VB, VC intersectează feţele tetraedrului în punctele A', B' respectiv C'. Arătaţi că:

$$\frac{PA'}{VA} + \frac{PB'}{VB} + \frac{PC'}{VC} = 1.$$

***

Soluţie.

Dacă $BC \cap AP = \{A_1\}$, atunci $A' \in VA_1$. Din asemănarea triunghiurilor A_1PA' şi A_1AV obţinem:

$$\frac{PA'}{VA} = \frac{PA_1}{AA_1}.$$

Se arată uşor că $\frac{PA_1}{AA_1} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$, deci obţinem:

$$\frac{PA'}{VA} = \frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}.$$

Analog se arată că $\frac{PB'}{VB} = \frac{S_{PAC}}{S_{ABC}}$ şi $\frac{PC'}{VC} = \frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}$, prin urmare

$$\frac{PA'}{VA} + \frac{PB'}{VB} + \frac{PC'}{VC} = 1.$$

SOLUȚIE

Problema 2.

Fie $a_1,\ a_2,\ a_{3,}$ ..., a_{2022} o scriere arbitrară a numerelor $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 2022$. Arătaţi că printre numerele

$$|a_1 - 1|\,,\ \ |a_2 - 2|\,,\ \ |a_3 - 3|\,,\ \ ..., |a_{2022} - 2022|$$

există (cel puţin) două numere egale.

***

Soluţie.

Considerăm $a_1,\ a_2,\ a_{3,}$ ..., a_{2022} o scriere arbitrară a numerelor $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ 2022$. Avem $|a_k - k| \in \{0, 1, \ldots, 2021\}$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$.

Presupunem, prin absurd, că numerele $|a_k - k|\,,\ \ k \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$, sunt distincte. Atunci

$$\{|a_k - k|\,,\ k = 1, 2, \ldots, 2022\} = \{0, 1, 2, \ldots, 2021\},$$

deci suma

$$S := |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + ... + |a_{2022} - 2022| = 0 + 1 + 2 + \cdots + 2021 = 2021 \cdot 1011$$

este un număr impar.

Pe de altă parte, dacă x este un număr întreg, atunci $|x|$ are aceeaşi paritate cu x. Rezultă că S are aceeaşi paritate cu numărul

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 2) + ... + (a_{2022} - 2022) = 0,$$

prin urmare S este un număr par, contradicţie.

Deducem că printre $|a_1 - 1|\,,\ \ |a_2 - 2|\,,\ \ ..., |a_{2022} - 2022|$ există două numere egale.

SOLUȚIE

Problema 3.

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni a, b, c şi diagonala egală cu d. Dacă notăm cu k distanţa de la A la planul $\left(A'BD\right)$ iar cu V volumul paralelipipedului, arătați că

$$V \geq d\sqrt{3}k^2.$$

Petru Vlad, Concursul Gheorghe Lazăr, Sibiu, 2016

Soluţie.

Calculând, obţinem $V = abc,\ d^2 = a^2 + b^2 + c^2,\ \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2}$.
Astfel, inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu :

$$abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

Utilizând inegalitatea

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx),\ \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

obținem

$$\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)^2 \geq 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

SOLUȚIE

Problema 4.

Fie a un număr natural nenul. Să se demonstreze că a este pătrat perfect, dacă și numai dacă, oricare ar fi $b \in \mathbb{N}^*$ există $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + bc$ să fie pătrat perfect.

Bogdan Enescu, Olimpiada Națională de Matematică 1997

Soluţie.

Dacă a este pătrat perfect atunci există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = k^2$. Pentru orice $b \in \mathbb{N}^*$ considerăm $c = b + 2k$ și atunci avem $a + bc = k^2 + b^2 + 2bk = (b + k)^2$ ceea ce arată că $a + bc$ este pătrat perfect.

Reciproc, dacă $a \in \mathbb{N}^*$ și pentru orice $b \in \mathbb{N}^*$ există $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + bc$ este pătrat perfect să arătăm că a este pătrat perfect.

Fie $b = a^2$ și $c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a + bc = a + a^2c$ este pătrat perfect adică $a(1 + ac) = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $(a, 1 + ac) = 1$ și $a(1 + ac) = k^2$ rezulă că a este pătrat perfect.