Problema săptămânii 306

Dacă $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ şi $a+b+c+d+e=1$, demonstraţi că

$$ad + dc + cb + be + ea \leq \frac{1}{5}.$$

baraj China, 1994

Soluţia 1: (*Denis Nica*)
Avem $a+b \leq a+c \leq b+d \leq c+e \leq d+e$, astfel că din inegalitatea lui Cebâşev rezultă

$$ad + dc + cb + be + ea = \frac{a(d+e) + b(c+e) + c(b+d) + d(a+c) + e(a+b)}{2} \leq$$

$$\frac{(a+b+c+d+e) \cdot [(d+e) + (c+e) + (b+d) + (a+c) + (a+b)]}{2 \cdot 5} =$$

$$\frac{2(a+b+c+d+e)^2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = d = e = \dfrac{1}{5}$.

Soluţia 2: (*David Ghibu, Titu Zvonaru*)
Fie $x, y, z, t \geq 0$ astfel încât $b = a+x$, $c = a+x+y$, $d = a+x+y+z$, $e = a+x+y+z+t$. Inegalitatea de demonstrat se scrie

$$(5a + 4x + 3y + 2z + t)^2 \geq 5[a(a+x+y+z) + (a+x+y+z)(a+x+y)+$$

$$(a+x+y)(a+x) + (a+x)(a+x+y+z+t) + (a+x+y+z+t)a],$$

adică, după calcule,

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 + t^2 + 4xy + 6xz + 3xt + 7yz + 6yt + 4zt \geq 0.$$

Această inegalitate este evident adevărată. Egalitate avem dacă și numai dacă $x = y = z = t = 0$, adică dacă și numai dacă $a = b = c = d = e = \dfrac{1}{5}$.

Soluţia 3: (schiţă) (*Radu Stoleriu, Aida Mitroi*)
Notând $E(a,b,c,d,e) = ad+dc+cb+be+ea$, se arată că dacă $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ atunci

$$E(a,b,c,d,e) \overset{(1)}{\leq} E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d, e\right) \overset{(2)}{\leq} E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, \frac{d+e}{2}, \frac{d+e}{2}\right)$$

şi apoi că

$$E(x, x, 1-2x-2y, y, y) \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{5}.$$

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Titu Zvonaru, Denis Nica, Emanuel Mazăre, Radu Stoleriu* şi *Aida Mitroi.*

Problem of the week no. 306

If $0 \le a \le b \le c \le d \le e$ and $a+b+c+d+e=1$, prove that

$$ad+dc+cb+be+ea \le \frac{1}{5}.$$

TST China, 1994

Solution 1: (*Denis Nica*)
As $a+b \le a+c \le b+d \le c+e \le d+e$, from Chebyshev's inequality we get

$$ad+dc+cb+be+ea = \frac{a(d+e)+b(c+e)+c(b+d)+d(a+c)+e(a+b)}{2} \le$$

$$\frac{(a+b+c+d+e)\cdot[(d+e)+(c+e)+(b+d)+(a+c)+(a+b)]}{2\cdot 5} =$$

$$\frac{2(a+b+c+d+e)^2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Equality holds if and only if $a=b=c=d=e=\dfrac{1}{5}$.

Solution 2: (*David Ghibu, Titu Zvonaru*)
Consider $x,y,z,t \ge 0$ such that $b=a+x$, $c=a+x+y$, $d=a+x+y+z$, $e=a+x+y+z+t$. The inequality becomes

$$(5a+4x+3y+2z+t)^2 \ge 5[a(a+x+y+z)+(a+x+y+z)(a+x+y)+$$

$$(a+x+y)(a+x)+(a+x)(a+x+y+z+t)+(a+x+y+z+t)a],$$

i.e., after some computations,

$$x^2+4y^2+4z^2+t^2+4xy+6xz+3xt+7yz+6yt+4zt \ge 0.$$

This inequality is clearly true. Equality holds if and only if $x=y=z=t=0$, i.e. if and only if $a=b=c=d=e=\dfrac{1}{5}$.