Problema săptămânii 304

Un pătrat $n \times n$ este împărţit în n^2 pătrăţele unitate. Un pion este plasat într-un pătrăţel unitate arbitrar al pătratului. Pionul poate muta dintr-un pătrăţel situat pe coloana k în oricare din pătrăţelele situate pe linia k. Arătaţi că există o succesiune formată din n^2 asemenea mutări ale pionului prin care fiecare pătrăţel este vizitat o dată, iar la sfârşit pionul se întoarce în poziţia sa iniţială.

Dinu Şerbănescu, Concursul IMAR, 2008

Soluţia 1: (oficială)
Etichetăm pătrăţelul de pe linia i, coloana j cu (i, j). O mutare va fi notată $(i, k) \mapsto (k, t)$. Vom demonstra afirmaţia din enunţ prin inducţie după n. Deoarece verificarea este trivială, presupunem că există un circuit pentru n şi notăm (i, a_i) pătrăţelul în care se mută din (i, i) în acest circuit. Acum vom înlocui mutarea $(n, n) \mapsto (n, a_n)$ cu succesiunea de mutări $(n, n) \mapsto (n, n+1) \mapsto (n+1, n+1) \mapsto (n+1, n) \mapsto (n, a_n)$, şi, pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n-1$, mutarea $(i, i) \mapsto (i, a_i)$ cu secvenţa de mutări $(i, i) \mapsto (i, n+1) \mapsto (n+1, i) \mapsto (i, a_i)$.
Celelalte mutări rămânând neschimbate, este uşor de văzut că toate cele $3+2(n-1) = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$ pătrăţele noi ale pătratului $(n+1) \times (n+1)$ sunt vizitate, ceea ce încheie problema.

Soluţia 2: (*David Ghibu*)
Etichetăm pătrăţelul de pe linia i, coloana j cu (i, j). O mutare va fi notată $(i, k) \mapsto (k, t)$. Vom demonstra prin inducţie după n existenţa unui circuit cu proprietatea din enunţ. Pentru $n = 1$ nu avem ce demonstra, iar pentru $n = 2$ avem următorul circuit: $(1, 1) \mapsto (1, 2) \mapsto (2, 2) \mapsto (2, 1) \mapsto (1, 2)$.
Considerăm $n \geq 3$ şi presupunem că pentru tabla $(n-1) \times (n-1)$ există un circuit cu proprietatea din enunţ. Alegem o mutare $(i, j) \mapsto (j, k)$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, care face parte din respectivul circuit şi intercalăm următoarele mutări (facem un ,,ocol”):
$(i, j) \mapsto (j, n) \mapsto (n, 1) \mapsto (1, n) \mapsto (n, 2) \mapsto (2, n) \mapsto \ldots \mapsto (n, j-1) \mapsto (j-1, n) \mapsto (n, j+1) \mapsto (j+1, n) \mapsto \ldots \mapsto (n, n-1) \mapsto (n-1, n) \mapsto (n, n) \mapsto (n, j) \mapsto (j, k)$.
Astfel, toate pătratele nou apărute (linia n şi coloana n) vor fi parcurse exact o dată în cadrul ocolului, restul pătrăţelelor fiind parcurse în partea nemodificată a circuitului.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Emanuel Mazăre, Radu Stoleriu* şi *Aida Mitroi.*

Problem of the week no. 304

An array $n \times n$ is given, consisting of n^2 unit squares. A pawn is placed arbitrarily on a unit square. The pawn can move from a square of the k-th column to any square of the k-th row. Show that there exists a sequence of n^2 moves of the pawn so that all the unit squares of the array are visited once, the pawn returning to its original position.

Dinu Şerbănescu, IMAR Competition 2008

Official solution: Label the unit squares (i, j). A move will be denoted $(i, k) \mapsto (k, t)$. We proceed by induction on n. As the base case is trivial, assume that a circuit exists for n and let (i, a_i) be the next square visited after (i, i) in this circuit. Now replace the move $(n, n) \mapsto (n, a_n)$ with the moves $(n, n) \mapsto (n, n + 1) \mapsto (n + 1, n + 1) \mapsto (n + 1, n) \mapsto (n, a_n)$, and replace $(i, i) \mapsto (i, a_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ by the sequence $(i, i) \mapsto (i, n + 1) \mapsto (n + 1, i) \mapsto (i, a_i)$.
With the rest of the moves unaltered, notice that all the $3 + 2(n - 1) = 2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$ new squares of the $(n + 1) \times (n + 1)$ array are visited, so we are done.