Problema săptămânii 303

Fie a, b, c numere naturale astfel încât $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Dacă cel mai mare divizor comun al numerelor a, b, c este 1, demonstraţi că $a+b$ este pătrat perfect.

Soluţie: Fie $d=(a, b)$ şi $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $a=dx$, $b=dy$. Atunci $(x, y)=1$ şi $(d, c)=1$ (altminteri am avea $(a, b, c) \neq 1$). Relaţia din enunţ se scrie $\frac{1}{dx}+\frac{1}{dy}=\frac{1}{c}$. Eliminând numitorii ajungem la $c(x+y)=dxy$. Evident, $(x, y)=1$ implică $(x+y, x)=1$ şi $(x+y, y)=1$, deci din relaţia precedentă rezultă $x+y \mid d$. Cum $(c, d)=1$, rezultă $d=x+y$, deci $a+b=d(x+y)^2=d^2$, de unde concluzia.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Emanuel Mazăre, Radu Stoleriu, Denis Nica, Ştefan Gobej* şi *Aida Mitroi.*

Problem of the week no. 303

Positive integers a, b, c satisfy $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. If the greatest common divisor of a, b, c is 1, prove that $a+b$ is a perfect square.

Solution: Consider $d=(a, b)$ and $x, y \in \mathbb{N}$ such that $a=dx$, $b=dy$. It follows that $(x, y)=1$ and $(d, c)=1$ (otherwise $(a, b, c) \neq 1$). The given relation becomes $\frac{1}{dx}+\frac{1}{dy}=\frac{1}{c}$. Clearing denominators yields $c(x+y)=dxy$. Clearly, $(x, y)=1$ means that $(x+y, x)=1$ and $(x+y, y)=1$, therefore the last relation leads to $x+y \mid d$. As $(c, d)=1$, it follows that $d=x+y$, i.e. $a+b=d(x+y)^2=d^2$, and the conclusion.