26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

June 30, 2022
Language: *English*

Problem 1. Find all pairs (a, b) of positive integers such that

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Problem 2. Let ABC be an acute triangle such that $AH = HD$, where H is the orthocenter of ABC and $D \in BC$ is the foot of the altitude from the vertex A. Let ℓ denote the line through H which is tangent to the circumcircle of the triangle BHC. Let S and T be the intersection points of ℓ with AB and AC, respectively. Denote the midpoints of BH and CH by M and N, respectively. Prove that the lines SM and TN are parallel.

Problem 3. Find all quadruples of positive integers (p, q, a, b), where p and q are prime numbers and $a > 1$, such that

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Problem 4. We call an even positive integer n *nice* if the set $\{1, 2, \dots, n\}$ can be partitioned into $\frac{n}{2}$ two-element subsets, such that the sum of the elements in each subset is a power of 3. For example, 6 is nice, because the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ can be partitioned into subsets $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Find the number of nice positive integers which are smaller than 3^{2022}.

Time: 4 hours and 30 minutes.
Each problem is worth 10 points.

Olimpiada e 26$^{\text{të}}$ Ballkanike e Matematikës për të Rinj
Sarajevë, Bosnjë dhe Hercegovinë

30 Qershor, 2022
Language: *Albanian*

Problemi 1. Gjeni të gjithë çiftet e numrave të plotë pozitivë (a, b) të tillë që

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Problemi 2. Jepet trekëndëshi këndngushtë ABC i tillë që $AH = HD$, ku pika H është ortoqendra (pikëprerja e lartësive) e po të njëjtit trekëndësh ABC dhe pika $D \in BC$ është këmba e lartësisë së hequr nga kulmi A. Shënohet me ℓ drejtëza që kalon në pikën H dhe është tangjente me rrethin e jashtëshkruar trekëndëshit BHC. Pikat S dhe T janë pikëprerjet e drejtëzës ℓ me brinjët AB dhe AC, respektivisht. Meset e segmenteve BH dhe CH shënohen me M dhe N, respektivisht. Vërtetoni që drejtëzat SM dhe TN janë paralele.

Problemi 3. Gjeni të gjitha katërshet e numrave të plotë pozitivë (p, q, a, b), ku p dhe q janë numra të thjeshtë dhe $a > 1$, të tilla që

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Problemi 4. Një numër i plotë pozitiv çift n quhet *i këndshëm* në qoftë se bashkësia $\{1, 2, \ldots, n\}$ mund të copëtohet në $\frac{n}{2}$ nënbashkësi prej dy elementësh secila, në mënyrë të tillë që shuma e elementëve në secilën nënbashkësi është fuqi e 3-it. Për shembull, 6 është i këndshëm, sepse bashkësia $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mund të copëtohet në nënbashkësitë $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Gjeni numrin e numrave të plotë pozitivë të këndshëm të cilët janë më të vegjël se 3^{2022}.

Koha: 4 orë dhe 30 minuta.
Secili problem vlen 10 pikë.

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

June 30, 2022
Language: *Arabic*

أولمبياد رياضيات الناشئين لدول البلقان السادس والعشرون.
ساراييفو، البوسنة والهرسك. 30 يونيو، 2022م

مسألة 1. أوجد جميع الأزواج (a, b) من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق أنَّ

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$$

مسألة 2. في المثلث $\triangle ABC$ حاد الزوايا، $AH = HD$ حيث H ملتقى ارتفاعاته، والنقطة D هي تقاطع الارتفاع من الرأس A مع BC. المستقيم ℓ يمس الدائرة المحيطة بالمثلث $\triangle BHC$ عند H. المستقيم ℓ يقطع AB, AC في S, T على الترتيب. النقطتان M, N منتصفا BH, CH على الترتيب. أثبت أن $SM \parallel TN$.

مسألة 3. أوجد جميع الرباعيات (p, q, a, b) من الأعداد الصحيحة الموجبة حيث أنّ p, q عددان أوليان و $a > 1$ والتي تُحقق أنَّ

$$p^a = 1 + 5q^b$$

مسألة 4. لأي عدد زوجي موجب n، نقول أن n عدد لطيف إذا أمكن تقسيم المجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$ إلى $\frac{n}{2}$ مجموعة جزئية ذات عنصرين، بحيث يكون مجموع العنصرين في كل مجموعة قوة للعدد 3. أوجد عدد الأعداد اللطيفة الموجبة الأصغر من 3^{2022}.
مثلاً 6 عدد لطيف لأنّ المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ بالإمكان تقسيمها إلى المجموعات $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$.

الوقت: 4 ساعات و30 دقيقة.

عشر درجات لكل مسألة.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 İyun 2022
Language: *Azerbaijani*

Məsələ 1. Bütün müsbət tam (a, b) cütlüklərini tapın ki, aşağıdakı şərt ödənilsin.

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Məsələ 2. İtibucaqlı ABC üçbucağında H hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi, $D \in BC$ isə A-dan enən hündürlüyün ayağıdır, belə ki, $AH = HD$. ℓ xətti H-dan keçən və BHC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrəyə toxunan xəttdir. ℓ xətti AB və AC ilə uyğun olaraq S və T-də kəsişir. BH və CH parçalarının orta nöqtələri uyğun olaraq M və N olsun. İsbat edin ki, SM və TN xətləri paraleldir.

Məsələ 3. Müsbət tam ədədlərdən ibarət olan bütün (p, q, a, b) dördlüklərini tapın ki, p və q sadə ədəd olsun, $a > 1$ olsun və aşağıdakı bərabərlik ödənilsin.

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Məsələ 4. Cüt müsbət tam n ədədi o zaman *yaxşı* adlanır ki, $\{1, 2, \ldots, n\}$ çoxluğu $\frac{n}{2}$ dənə iki elementli alt çoxluqlara elə bölünə bilsin ki, hər bir alt çoxluqdakı iki elementin cəmi 3-ün qüvvəti olsun. Məsələn, 6 *yaxşı* ədəddir, çünki $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ çoxluğu $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ şəklində alt çoxluqlara bölünə bilir. 3^{2022}-dən kiçik müsbət *yaxşı* ədədlərin sayını tapın.

İmtahan müddəti: 4 saat 30 dəqiqə.
Hər sual 10 bal dəyərindədir.

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

June 30, 2022
Language: *Bosnian*

Problem 1. Nađi sve parove prirodnih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Problem 2. U oštrouglom trouglu ABC je $AH = HD$, gdje je H ortocentar trougla ABC, a $D \in BC$ je podnožje visine iz vrha A. Neka ℓ označava pravu kroz H koja je tangenta na kružnicu opisanu oko trougla BHC. Neka su S i T tačke u kojima prava ℓ siječe AB i AC, tim redom. Polovišta duži BH i CH označimo sa M i N, tim redom. Dokaži da su prave SM i TN paralelne.

Problem 3. Nađi sve uređene četvorke prirodnih brojeva (p, q, a, b), gdje su p i q prosti brojevi i $a > 1$, takve da vrijedi

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Problem 4. Za paran prirodan broj n kažemo da je *lijep* ako se skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ može podijeliti u $\frac{n}{2}$ disjunktnih dvočlanih podskupova tako da zbir elemenata u svakom takvom podskupu bude neki stepen broja 3. Na primjer, broj 6 je lijep jer se $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ može podijeliti u $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Nađi broj lijepih prirodnih brojeva koji su manji od 3^{2022}.

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta.
Svaki problem vrijedi 10 bodova.

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 юни 2022
Language: *Bulgarian*

Задача 1. Намерете всички двойки (a, b) от естествени числа, за които
$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Задача 2. Триъгълник ABC е остроъгълен и $AH = HD$, където H е ортоцентърът на ABC, а $D \in BC$ е петàта на височината от върха A. Права l допира описаната около триъгълник BHC окръжност в точка H. Пресечните точки на l с AB и AC са съответно S и T. Средите на BH и CH са съответно M и N. Докажете, че правите SM и TN са успоредни.

Задача 3. Намерете всички четворки (p, q, a, b) от естествени числа, такива че p и q са прости, $a > 1$ и $p^a = 1 + 5q^b$.

Задача 4. Да наречем едно четно естествено число n „добро”, ако множеството $\{1,2,\ldots,n\}$ може да се разбие на $\frac{n}{2}$ двуелементни подмножества, във всяко от които сборът на двата елемента е степен на 3. Например 6 е добро, понеже множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ може да се разбие на подмножествата $\{1,2\}, \{3,6\}, \{4,5\}$. Намерете броя на всички добри числа, които са по-малки от 3^{2022}.

Време за работа: 4 чàса и 30 минути
Всяка задача се оценява с 10 точки

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

June 30, 2022
Language: *Croatian*

Zadatak 1. Nađi sve parove (a, b) prirodnih brojeva takve da vrijedi

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Zadatak 2. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da je $|AH| = |HD|$, pri čemu je H ortocentar trokuta ABC i $D \in \overline{BC}$ je nožište visine iz vrha A. Neka je ℓ pravac koji prolazi točkom H i koji je tangenta je na kružnicu opisanu trokutu BHC. Neka su S i T sjecišta pravca ℓ s pravcima AB i AC redom. Označimo s M i N polovišta dužina $\overline{BH}$ i $\overline{CH}$ redom. Dokaži da su pravci SM i TN paralelni.

Zadatak 3. Nađi sve četvorke prirodnih brojeva (p, q, a, b), gdje su p i q prosti brojevi i $a > 1$, takve da je

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Zadatak 4. Za parni prirodni broj n kažemo da je *lijep* ako se skup $\{1, 2, \ldots, n\}$ može podijeliti na $\frac{n}{2}$ disjunktnih dvočlanih podskupova takvih da je zbroj elemenata svakog takvog podskupa potencija broja 3. Na primjer, broj 6 je lijep jer se skup $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ može podijeliti na podskupove $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Nađi broj lijepih prirodnih brojeva manjih od 3^{2022}.

Vrijeme za rješavanje: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 Juin 2022
Language: *French*

Problème 1. Déterminer toutes les paires (a, b) d'entiers strictement positifs telles que :

$$11ab \leqslant a^3 - b^3 \leqslant 12ab.$$

Problème 2. Soit ABC un triangle acutangle tel que $AH = HD$, où le point H est l'orthocentre du triangle ABC et le point $D \in (BC)$ est le pied de la hauteur issue du sommet A. Soit (ℓ) la tangente en H au cercle circonscrit au triangle BHC. Soit S et T les points d'intersection de la droite (ℓ) avec les droites (AB) et (AC) respectivement. On note M et N les milieux des segments $[BH]$ et $[CH]$ respectivement. Montrer que les droites (SM) et (TN) sont parallèles.

Problème 3. Déterminer tous les quadruplets d'entiers strictement positifs (p, q, a, b), où p et q sont des nombres premiers et $a > 1$, tels que :

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Problème 4. On dit qu'un entier pair strictement positif n est *gentil* si l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ peut être partitionné en $\frac{n}{2}$ sous-ensembles de cardinal 2, tels que la somme des éléments de chaque sous-ensemble est une puissance de 3. Par exemple, 6 est gentil, car l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ peut être partitionné en sous-ensembles de la façon suivante : $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs qui sont gentils et strictement inférieurs à 3^{2022}.

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 10 points.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 Ιουνίου 2022
Language: *Greek*

Πρόβλημα 1. Να βρεθούν όλα τα ζεύγη (a, b) θετικών ακέραιων αριθμών τέτοιων ώστε

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Πρόβλημα 2. Έστω ABC ένα οξυγώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε $AH = HD$, όπου H είναι το ορθόκεντρο του ABC και $D \in BC$ είναι το ίχνος του ύψους από την κορυφή A. Έστω ℓ η ευθεία η οποία διέρχεται από το H και εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου BHC. Έστω S και T τα σημεία τομής της ℓ με την AB και την AC, αντίστοιχα. Συμβολίζουμε τα μέσα των BH και CH με M και N, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες SM και TN είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 3. Να βρεθούν όλες οι τετράδες θετικών ακέραιων αριθμών (p, q, a, b), όπου οι p και q είναι πρώτοι αριθμοί και $a > 1$, έτσι ώστε

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Πρόβλημα 4. Αποκαλούμε έναν άρτιο θετικό ακέραιο αριθμό n *καλό* αν το σύνολο $\{1, 2, \ldots, n\}$ μπορεί να διαμερισθεί σε $\frac{n}{2}$ υποσύνολα δύο στοιχείων έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε υποσυνόλου να είναι δύναμη του 3. Για παράδειγμα, ο αριθμός 6 είναι καλός, διότι το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ μπορεί να διαμερισθεί στα υποσύνολα $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$ και $\{4, 5\}$. Να βρεθεί το πλήθος των καλών θετικών ακέραιων αριθμών οι οποίοι είναι μικρότεροι από το 3^{2022}.

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 јуни, 2022
Language: *Macedonian*

Задача 1. Одреди ги сите парови (a, b) од позитивни цели броеви за кои важи
$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Задача 2. Нека ABC е остроаголен триаголник во кој важи $AH = HD$, каде што H е ортоцентарот на ABC и $D \in BC$ е подножјето на висината спуштена од темето A. Нека со l е означена правата низ H што ја допира опишаната кружница околу триаголникот BHC. Нека S и T се пресечните точки на l со AB и AC, соодветно. Да ги означиме средините на BH и CH со M и N, соодветно. Докажи дека правите SM и TN се паралелни.

Задача 3. Одреди ги сите четворки (p, q, a, b) од позитивни цели броеви, каде што p и q се прости броеви и $a > 1$, за кои важи
$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Задача 4. Еден парен позитивен цел број n се нарекува “убав” ако множеството $\{1,2,\ldots,n\}$ може да се разбие на $\frac{n}{2}$ двоелементни подмножества, такви што збирот на елементите во секое подмножество е степен на 3. На пример, 6 е “убав” бидејќи множеството $\{1,2,3,4,5,6\}$ може да се разбие на подмножества $\{1,2\},\{3,6\},\{4,5\}$. Одреди го бројот од “убави” позитивни цели броеви што се помали од 3^{2022}.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Секоја задача се вреднува со 10 поени.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30.06.2022. god.
Language: *Montenegrin*

Zadatak 1. Odrediti sve parove (a, b) prirodnih brojeva za koje važi

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Zadatak 2. Neka je ABC oštrougli trougao takav da je $AH = HD$, gdje je H ortocentar trougla ABC i $D \in BC$ je podnožje visine iz tjemena A. Označimo sa ℓ pravu koja prolazi kroz H i koja je tangenta opisane kružnice trougla BHC. Neka su S i T presječne tačke prave ℓ sa AB i AC, respektivno. Označimo središta duži BH i CH sa M i N, respektivno. Dokazati da su prave SM i TN paralelne.

Zadatak 3. Odrediti sve četvorke (p, q, a, b) prirodnih brojeva, gdje su p i q prosti brojevi i $a > 1$, za koje važi

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Zadatak 4. Paran prirodan broj n zovemo *lijepim* ako se od elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ mogu formirati $\frac{n}{2}$ disjunktnih dvočlanih podskupova, takvih da je zbir elemenata u svakom podskupu stepen broja 3. Na primjer, 6 je lijep, jer se od elemenata skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mogu formirati podskupovi $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Odrediti broj lijepih parnih prirodnih brojeva koji su manji od 3^{2022}.

Vrijeme za rad: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi najviše 10 poena.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 iunie 2022
Language: *Romanian*

Problema 1. Determinați toate perechile (a, b) de numere naturale nenule astfel încât

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic astfel încât $AH = HD$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC și $D \in BC$ este piciorul înălțimii din A. Notăm cu ℓ dreapta care trece prin H și este tangentă la cercul circumscris triunghiului BHC. Fie S și T punctele de intersecție a dreptei ℓ cu AB, respectiv cu AC. Notăm mijloacele segmentelor BH și CH cu M, respectiv cu N. Demonstrați că dreptele SM și TN sunt paralele.

Problema 3. Determinați toate cvadruplele de numere naturale nenule (p, q, a, b), unde p și q sunt numere prime și $a > 1$, astfel încât

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Problema 4. Spunem că un număr natural nenul par n este *simpatic* dacă mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ se poate partiționa în $\frac{n}{2}$ submulțimi de câte două elemente, astfel încât suma elementelor din fiecare submulțime este o putere a lui 3. De exemplu, 6 este simpatic, deoarece mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se poate partiționa în submulțimile $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$. Determinați numărul de numere naturale nenule simpatice mai mici decât 3^{2022}.

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă se notează cu 10 puncte.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 июня 2022 г.
Language: *Russian*

Задача 1. Найдите все пары (a, b) положительных целых чисел таких, что

$$11ab \le a^3 - b^3 \le 12ab.$$

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $AH = HD$, где H— ортоцентр треугольника ABC, а точка $D \in BC$— основание высоты, опущенной из вершины A. Обозначим через ℓ прямую, проходящую через точку H и касающуюся окружности, описанной около треугольника BHC. Пусть S и T— точки пересечения прямой ℓ с AB и AC соответственно. Обозначим середины отрезков BH и CH через M и N соответственно. Докажите, что прямые SM и TN параллельны.

Задача 3. Найдите все четвёрки (p, q, a, b) положительных целых чисел, где p и q простые и $a > 1$, для которых справедливо равенство

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Задача 4. Назовём чётное положительное целое число n *няшным*, если множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно разбить на $\frac{n}{2}$ двухэлементных подмножеств так, что сумма элементов каждого из этих подмножеств является натуральной степенью числа 3. Например, 6 является няшным, так как множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ может быть разбито на подмножества $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Найдите количество всех няшных положительных целых чисел, меньших 3^{2022}.

Время работы: 4 часа 30 минут.
Каждая задача оценивается в 10 баллов.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30. 6. 2022.
Language : Serbian(BiH)

Проблем 1. Нађи све парове природних бројева (a, b) таквих да је

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab.$$

Проблем 2. У оштроуглом троуглу ABC је $AH = HD$, гдје је H ортоцентар троугла ABC, а $D \in BC$ је подножје висине из врха A. Нека ℓ означава праву кроз H која је тангента на кружницу описану око троугла BHC. Нека су S и T тачке у којима права ℓ сијече AB и AC, тим редом. Средишта дужи BH и CH означимо са M и N, тим редом. Докажи да су праве SM и TN паралелне.

Проблем 3. Нађи све уређене четворке природних бројева (p, q, a, b), гдје су p и q прости бројеви и $a > 1$, за које вриједи

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Проблем 4. За паран природан број n кажемо да је *лијеп* ако се скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$ може подијелити у $\frac{n}{2}$ дисјунктних двочланих подскупова тако да збир елемената у сваком таквом подскупу буде неки степен броја 3. На примјер, број 6 је лијеп јер се $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ може подијелити у $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Нађи број лијепих природних бројева који су мањи од 3^{2022}.

Вријеме: 4 сата и 30 минута.
Сваки проблем вриједи 10 бодова.

26^{th} Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30. јун 2022. године
Language: *Serbian*

Задатак 1. Одреди све парове природних бројева (a, b) за које важи
$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$$

Задатак 2. Нека је ABC оштроугли троугао такав да је $AH = HD$, где је H ортоцентар троугла ABC и $D \in BC$ подножје висине из темена A на страницу BC. Означимо са l праву која садржи тачку H и која је тангента описане кружнице троугла BHC. Означимо са S и T тачке пресека праве l и страница AB и AC, редом. Означимо средишта дужи BH и CH редом са M и N. Докажи да су праве SM и TN паралелне.

Задатак 3. Одреди све четворке природних бројева (p, q, a, b), где су p и q прости бројеви и $a > 1$, за које важи да је
$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Задатак 4. За паран природан број n кажемо да је „леп“ ако се од елемената скупа $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ може формирати $\frac{n}{2}$ дисјунктних двочланих подскупова, таквих да је збир два броја у сваком од њих једнак неком степену броја 3. На пример, број 6 је „леп“, јер се од елемената скупа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ могу формирати подскупови $\{1, 2\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 5\}$. Одреди колико има „лепих“ парних природних бројева мањих од 3^{2022}.

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак се бодује са 10 бодова

26th Junior Balkan Mathematical Olympiad
Sarajevo, Bosnia and Herzegovina

30 Haziran 2022
Language: *Turkish*

Problem 1.

$$11ab \leq a^3 - b^3 \leq 12ab$$

koşullarını sağlayan tüm (a, b) pozitif tam sayı ikililerini bulunuz.

Problem 2. Dar açılı bir ABC üçgeninde diklik merkezi H, A köşesinden inilen dikmenin ayağı $D \in [BC]$ olmak üzere, $|AH| = |HD|$ dir. H noktasından geçen ve BHC üçgeninin çevrel çemberine teğet olan doğru ℓ olsun. ℓ ile $[AB]$ ve $[AC]$ nin kesişim noktaları sırasıyla S ve T olsun. $[BH]$ ve $[CH]$ nin orta noktaları sırasıyla M and N olsun. SM ve TN doğrularının paralel olduğunu gösteriniz.

Problem 3. p ve q asal sayılar, $a > 1$ olmak üzere,

$$p^a = 1 + 5q^b$$

eşitliğini sağlayan tüm (p, q, a, b) pozitif tam sayı dörtlülerini bulunuz.

Problem 4. $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi, her biri iki elemandan oluşan ve elemanlarının toplamı 3'ün kuvveti olan $\frac{n}{2}$ tane alt kümeye parçalanabiliyorsa, n pozitif çift tam sayısına *güzel* diyelim. Örneğin, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesi, $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ alt kümelerine parçalanabildiği için 6 güzel sayıdır. 3^{2022} den küçük olan güzel pozitif tam sayıların kaç tane olduğunu belirleyiniz.

Süre: 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 10 puan değerindedir.