EXAMENE ȘI CONCURSURI

OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI, 2022

prezentare de MARIUS PERIANU,[1)] CRISTIAN MANGRA [2)] și CRISTIAN LAZĂR[3)]

În perioada 28 iunie - 3 iulie 2022, la Sarajevo (Bosnia și Herțegovina) s-a desfășurat cea de a 26-a ediție a Olimpiadei Balcanice de Matematică pentru Juniori (JBMO 2022). Au participat echipe de câte 6 elevi reprezentând Albania, Bulgaria, Bosnia și Herțegovina, Cipru, Grecia, Macedonia, Moldova, Muntenegru, România, Serbia și Turcia (țări oficiale), precum și Arabia Saudită, Azerbaidjan, Bosnia și Herțegovina (echipa B), Croația, Franța, Kazahstan, Kîrgîzstan și Tadjikistan (țări invitate).

---

1) Profesor, Colegiul Național „Ion Minulescu“, Slatina..

2) Profesor, Colegiul Național „Tudor Vianu“, București.

3) Profesor, Colegiul „Național”, Iași.

Elevii români au obținut patru medalii de aur și două medalii de argint.

Medalii de aur: *Aida Mitroi* (clasa a VIII-a, Școala Gimnazială Nr.16 „Take Ionescu", Timișoara) - punctaj maxim, *Victor-Vasile Dragoș* (clasa a VIII-a, Colegiul Național „Vasile Lucaciu", Baia Mare) - punctaj maxim, *Andrei Vila* (clasa a VIII-a, Liceul Internațional de Informatică, București), *Radu-Ionuț Stoleriu* (clasa a VIII-a, Colegiul Național „Emil Racoviță", Iași).

Medalii de argint: *David Ghibu* (clasa a VIII-a, Liceul Internațional de Informatică, București), *Emanuel Mazăre* (clasa a VIII-a, Școala Gimnazială „Mihai Eminescu", Pitești).

Echipa României a fost coordonată de profesorii *Marius Perianu* (Colegiul Național „Ion Minulescu", Slatina) - conducător, *Cristian Mangra* (Colegiul Național „Tudor Vianu", București) - adjunct și *Cristian Lazăr* (Colegiul „Național" Iași) - observator.

În clasamentul neoficial pe națiuni, România a ocupat locul întâi, cu 224 de puncte, cel mai mare scor general pe echipe din istoria competiției. Pe podium s-au mai clasat Serbia (174 de puncte) și Turcia (164 de puncte).

Prezentăm, în continuare, problemele date la concurs și soluțiile acestora. La fiecare dintre primele două probleme, toți cei șase elevi ai noștri au obținut punctajul maxim (10 puncte).

Problema 1. Determinați toate perechile (a, b) de numere naturale nenule astfel încât $11ab \leqslant a^3 - b^3 \leqslant 12ab$.

Croația

Soluție. Întrucât $a^3 - b^3 \geqslant 11ab > 0$, rezultă că $a > b$, ceea ce, ținând cont că a și b sunt numere naturale, implică $a - b \geqslant 1$. Ca urmare, avem:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)\left[(a-b)^2 + 3ab\right] \geqslant (a-b)(1+3ab)$$
$$> 3ab(a-b).$$

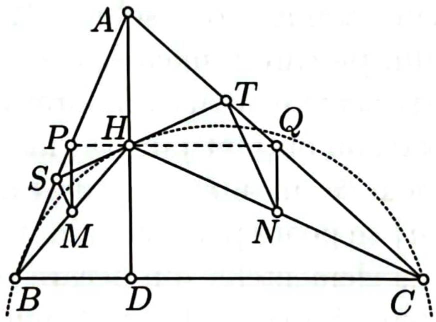
Cum $3ab(a-b) < a^3 - b^3 \leqslant 12ab$, rezultă că $a - b < 4$, deci $a - b \in \{1, 2, 3\}$.

- Dacă $a - b = 1$, din $11ab \leqslant a^3 - b^3$ obținem $8b^2 + 8b \leqslant 1$, fals ($b \geqslant 1$).
- Dacă $a - b = 2$, din $11ab \leqslant a^3 - b^3$ obținem $5b^2 + 10b \leqslant 8$, fals ($b \geqslant 1$).
- Dacă $a - b = 3$, din $11ab \leqslant a^3 - b^3$ obținem $2b^2 + 6b \leqslant 27$, de unde rezultă că $b \in \{1, 2\}$, deci $(a, b) \in \{(4, 1); (5, 2)\}$. Inegalitatea $a^3 - b^3 \leqslant 12ab$ se verifică doar pentru $(a, b) = (5, 2)$, care este unica soluție a problemei.

Problema 2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic astfel încât $AH = HD$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC și $D \in BC$ este piciorul înălțimii din A. Notăm cu ℓ dreapta care trece prin H și este tangentă la cercul circumscris triunghiului BHC. Fie S și T punctele de intersecție a dreptei ℓ cu AB, respectiv cu AC. Notăm mijloacele segmentelor BH și CH cu M, respectiv cu N. Demonstrați că dreptele SM și TN sunt paralele.

Grecia

Soluție. Fie P mijlocul laturii $[AB]$ și Q mijlocul laturii $[AC]$. Deoarece $[PH]$ este linie mijlocie în triunghiul ABD, iar $[QH]$ este linie mijlocie în triunghiul ACD, rezultă că $PH \parallel BD$ și $QH \parallel CD$, deci punctele P, H, Q sunt coliniare. În plus, avem $PQ \perp AH$.



Cum $[PM]$ este linie mijlocie în triunghiul ABH, rezultă că $PM \parallel AH$, deci $m(\sphericalangle BPM) = m(\sphericalangle BAH) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABC)$. Dar dreapta SH este tangentă la cercul circumscris triunghiului BHC, deci $\sphericalangle SHB = \sphericalangle HCB = 90^\circ - \sphericalangle ABC$. Deducem că $\sphericalangle SPM \equiv \sphericalangle SHM$, deci patrulaterul $SPHM$ este inscriptibil. Atunci $\sphericalangle MSH = \sphericalangle MPH = 90^\circ$ (deoarece $MP \parallel AH$ și $PQ \perp AH$), deci $MS \perp ST$.

Printr-un raționament analog se arată că și patrulaterul $THNQ$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle NTH = \sphericalangle NQH = 90^\circ$, de unde $NT \perp ST$. Ținând cont că $MS \perp ST$, rezultă că $MS \parallel NT$.

Problema 3. Determinați toate cvadruplele de numere naturale nenule (p, q, a, b), unde p și q sunt numere prime și $a > 1$, astfel încât

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Grecia

Soluție. Dacă p și q ar fi ambele impare, atunci p^a ar fi par, iar $1 + 5q^b$ ar fi impar, deci $p^a \neq 1 + 5q^b$. Ca urmare, $p = 2$ sau $q = 2$.

Analizăm cazul $p = 2$. Din $2^a = 1 + 5q^b$ rezultă că $5 \mid 2^a - 1$, de unde, studiind ultima cifră a puterilor lui 2, reiese că $4 \mid a$. Notând $a = 4k$, $k \in \mathbb{N}^*$, obținem $(4^k - 1)(4^k + 1) = 5q^b$. Cum $(4^k - 1, 4^k + 1) = 1$ și $3 \leqslant 4^k - 1 < 4^k + 1$, rezultă că fie $4^k - 1 = 5$ și $4^k + 1 = q^b$, fie $4^k - 1 = q^b$ și $4^k + 1 = 5$. Prima variantă nu convine, iar a doua conduce la soluția $(p, q, a, b) = (2, 3, 4, 1)$.

În continuare, studiem cazul $q = 2$. Evident, p este impar, deci $p \geqslant 3$. Avem $5 \cdot 2^b = p^a - 1 = (p-1)(p^{a-1} + p^{a-2} + \ldots + p + 1)$.

Dacă a este impar, numărul $s = p^{a-1} + p^{a-2} + \ldots + p + 1$ este suma unui număr impar de numere impare, deci este impar. Cum $s \mid 5 \cdot 2^b$, rezultă că $s \mid 5$, de unde obținem $4 \leqslant p+1 \leqslant p^{a-1} + p^{a-2} + \ldots + p + 1 \leqslant 5$ (deoarece $p \geqslant 3$ și $a > 1$). Deducem că singura posibilitate este $p = 3$ și $a = 2$, pentru care ecuația din enunț devine $5 \cdot 2^b = 8$, imposibil.

Ca urmare, a este par. Fie $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$; atunci $5 \cdot 2^b = (p^n - 1)(p^n + 1)$. Cum $(p^n - 1, p^n + 1) = 2$, sunt posibile cazurile:

$$\text{a)} \begin{cases} p^n - 1 = 2 \\ p^n + 1 = 5 \cdot 2^{b-1} \end{cases}; \qquad \text{b)} \begin{cases} p^n - 1 = 2 \cdot 5 \\ p^n + 1 = 2^{b-1} \end{cases}; \qquad \text{c)} \begin{cases} p^n - 1 = 2^{b-1} \\ p^n + 1 = 5 \cdot 2 \end{cases}.$$

Cazurile a) și b) nu conduc la soluții. În cazul c) obținem $p^n = 9$ și $2^{b-1} = 8$. Găsim $p = 3$, $n = 2$, $a = 4$, $b = 4$, deci avem soluția $(p, q, a, b) = (3, 2, 4, 4)$.

În concluzie, problema admite două soluții: $(2, 3, 4, 1)$ și $(3, 2, 4, 4)$.

Cu excepția lui Radu, pe care o mică scăpare la verificarea condițiilor lemei LTE (*Lifting the Exponent*) pentru eliminarea cazului $q = 2$, a impar l-a costat 2 puncte, elevii noștri au obținut punctaj maxim la această problemă.

Problema 4. Spunem că un număr natural nenul par n este *simpatic* dacă mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ se poate partiționa în $\frac{n}{2}$ submulțimi de câte două elemente, astfel încât suma elementelor din fiecare submulțime este o putere a lui 3. De exemplu, 6 este simpatic, deoarece mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se poate partiționa în submulțimile $\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$. Determinați numărul de numere naturale nenule simpatice mai mici decât 3^{2022}.

Grecia

Soluția 1 (Aida Mitroi). Fie x un număr simpatic și $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $3^{k-1} \leqslant x < 3^k$. Conform ipotezei, mulțimea $\{1, 2, \ldots, x\}$ se poate partiționa în submulțimi de câte două elemente, astfel încât suma elementelor din fiecare submulțime este o putere a lui 3. Notăm cu y al doilea element al submulțimii care îl conține pe x din această partiție (vom spune, de aici încolo, că *perechea* lui x este y). Evident, $y < x$, deoarece $y \in \{1, 2, \ldots, x\}$.

Atunci $3^{k-1} \leqslant x < x + y < 2x < 2 \cdot 3^k < 3^{k+1}$, deci $3^{k-1} < x + y < 3^{k+1}$. Cum $x + y$ este o putere a lui 3, deducem că $x + y = 3^k$, deci $y = 3^k - x$.

Vom arăta că perechea fiecărui număr natural u, cuprins între $3^k - x$ și x, este $3^k - u$, (1).

Într-adevăr, fie $u < x$ un număr natural astfel încât $3^k - u \leqslant u$, iar numerele $x, x-1, \ldots, u+1$ au perechile $3^k - x$, $3^k - (x-1)$, $\ldots$, $3^k - (u+1)$. Notăm cu v perechea lui u. Vom demonstra că $v = 3^k - u$.

Pe de o parte, avem $u + v \leqslant u + (u-1) \leqslant 2x - 1 \leqslant 2 \cdot 3^k - 1 < 3^{k+1}$. Pe de altă parte, din $3^k - u \leqslant u$ rezultă că $2u \geqslant 3^k$ și, cum $2u$ este par, iar

3^k este impar, deducem că $2u \geqslant 3^k + 1$, deci $u \geqslant \frac{3^k+1}{2} \geqslant 3^{k-1}$. Ca urmare, $3^{k+1} > u + v \geqslant u + 1 \geqslant 3^{k-1} + 1 > 3^{k-1}$. Așadar, $u + v = 3^k$.

Notăm cu $S(A)$ numărul de numere simpatice din mulțimea A.

Din (1) deducem că, dacă x este simpatic, atunci numerele din mulțimea $\{3^k - x, 3^k - x + 1, \ldots, x - 1, x\}$ se grupează „intern" în submulțimile de câte două elemente din partiție, deci numărul $3^k - x - 1$ este de asemenea simpatic, întrucât rămân de grupat doar elementele din mulțimea $\{1, 2, \ldots, 3^k - x - 1\}$.

Mai mult, deoarece $3^k - x - 1 \leqslant x < 3^k$, rezultă că $\frac{3^k+1}{2} \leqslant x \leqslant 3^k - 1$, deci numerele $3^{k-1}, 3^{k-1} + 1, \ldots, \frac{3^k-1}{2}$ nu sunt simpatice sau, altfel spus, $S\left(\left\{3^{k-1}, 3^{k-1} + 1, \ldots, \frac{3^k-1}{2}\right\}\right) = 0$, (2).

Observăm că numărul $3^k - 1$ este simpatic, deoarece putem forma submulțimile $\{u, 3^k - u\}$, pentru orice $u \in \{1, 2, \ldots, 3^k - 1\}$. Atunci:

$$S\Big(\{3^{k-1}, 3^{k-1}+1, \ldots, 3^k-1\}\Big) \overset{(2)}{=} S\left(\left\{\frac{3^k+1}{2}, \frac{3^k+3}{2}, \ldots, 3^k - 2\right\}\right) + 1 =$$

$$= S\left(\left\{3^k - \frac{3^k+1}{2} - 1, 3^k - \frac{3^k+3}{2} - 1, \ldots, 3^k - (3^k - 2) - 1\right\}\right) + 1 =$$

$$= S\left(\left\{1, 2, \ldots, \frac{3^k-5}{2}, \frac{3^k-3}{2}\right\}\right) + 1 \overset{(2)}{=} S\Big(\{1, 2, \ldots, 3^{k-1} - 1\}\Big) + 1, \quad (3).$$

Din (3) deducem că, dacă a_n este numărul de numere simpatice mai mici decât 3^n, atunci $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} + 1$, adică $a_n = 2a_{n-1} + 1$, pentru orice număr natural $n \geqslant 2$. Evident, $a_1 = 1$, deoarece există un singur număr simpatic mai mic decât 3, și anume 2. Prin inducție, sau folosind eventual relația $a_n + 1 = 2(a_{n-1} + 1)$, deducem că $a_n = 2^n - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. În consecință, există $2^{2022} - 1$ de numere simpatice mai mici decât 3^{2022}.

Soluția 2 (Radu Stoleriu). Prin inducție, vom arăta că un număr n este simpatic dacă și numai dacă scrierea sa în baza 3 conține doar cifrele 0 și 2.

Evident, numărul $n = 2 = 2_{(3)}$ este simpatic, deoarece suma elementelor mulțimii $\{1, 2\}$ este o putere a lui 3.

Numărul $n = 4 = 11_{(3)}$ nu este simpatic, deoarece elementul 4 din mulțimea $\{1, 2, 3, 4\}$ ar trebui grupat cu un număr cel puțin egal cu 5, absurd. În plus, din exemplul dat în enunț, se știe că numărul $6 = 20_{(3)}$ este simpatic.

Fie $n \geqslant 6$ un număr par. Presupunem, în continuare, că numerele simpatice mai mici strict decât n sunt numerele care se scriu în baza 3 doar cu cifrele 0 și 2 și numai acestea. Analizăm două cazuri.

a) Dacă n se scrie în baza 3 doar cu cifrele 0 și 2, atunci există $k, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = 2 \cdot 3^k + r$ și $0 \leqslant r \leqslant 3^k - 1$, iar la rândul său, r se scrie în baza 3 folosind, de asemenea, doar cifrele 0 și 2. Vom arăta că n este simpatic.

Mulțimile $\{3^k-r, 2\cdot 3^k+r\}$, $\{3^k-r+1, 2\cdot 3^k+r-1\}$, ..., $\left\{\dfrac{3^{k+1}-1}{2}, \dfrac{3^{k+1}+1}{2}\right\}$ au suma elementelor o putere a lui 3. Dacă $r = 3^k - 1$, atunci $n = \overline{22\ldots 2}_{(3)}$, iar mulțimile enumerate anterior formează o partiție a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, deci n este simpatic. Dacă $r < 3^k - 1$, pentru a arăta că n este simpatic, rămâne să arătăm că numerele $1, 2, \ldots\ 3^k-r-1$ se pot grupa în submulțimi de două elemente a căror sumă este o putere a lui 3 sau, altfel spus, că 3^k-r-1 este simpatic. Folosind ipoteza de inducție, este suficient să demonstrăm că numărul $3^k - r - 1$ se scrie în baza 3 doar cu cifrele 0 și 2.

Evident, avem scrierea $3^k - 1 = \overline{22\ldots 2}_{(3)}$, unde cifra 2 apare de k ori. Dacă $r = \overline{a_k a_{k-1}\ldots a_1 a_0}_{\,(3)}$, unde $a_i \in \{0, 2\}$, pentru orice $i = \overline{0, k}$, atunci $3^k - r - 1 = \overline{b_k b_{k-1}\ldots b_1 b_0}_{\,(3)}$, cu $b_i = 2 - a_i$, de unde reiese că $b_i \in \{0, 2\}$ pentru orice $i = \overline{0, k}$, ceea ce trebuia demonstrat.

b) Dacă în scrierea lui n în baza 3 apare cel puțin o dată cifra 1, vom arăta că n nu este simpatic. Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $3^k < n < 3^{k+1}$.

Dacă prima cifră din scrierea lui n în baza 3 este egală că 1, atunci $3^k < n < 2\cdot 3^k$. Vom arăta că n nu este simpatic. Presupunând, prin absurd, contrariul, dacă al doilea element al submulțimii din partiție care îl conține pe 3^k este un anumit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $3^k < 3^k + j \leqslant 3^k + n < 3^k + 2\cdot 3^k = 3^{k+1}$, deci suma $3^k + j$ nu este o putere a lui 3, contradicție.

Dacă prima cifră din scrierea lui n în baza 3 este 2, atunci $n \geqslant 2\cdot 3^k$. Presupunem, din nou prin absurd, că n este simpatic. Dacă perechea unui element $y \in \{3^k, 3^k + 1, \ldots, n\}$ este un anumit $z \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $3^k < y + z < 2n < 2\cdot 3^{k+1} < 3^{k+2}$, deci $y + z = 3^{k+1}$.

Ca urmare, partiția conține, în mod necesar, mulțimile $\{3^{k+1} - n, n\}$, $\{3^{k+1} - n + 1, n - 1\}$, ..., $\left\{\dfrac{3^{k+1}-1}{2}, \dfrac{3^{k+1}+1}{2}\right\}$. Cum n este simpatic, este obligatoriu ca și numerele $1, 2, \ldots\ 3^{k+1} - n - 1$ să se grupeze în perechi a căror sumă este o putere a lui 3 sau, altfel spus, că $3^{k+1} - n - 1$ este simpatic.

Folosind ipoteza de inducție, pentru a ajunge la o contradicție, este suficient să arătăm că numărul $3^{k+1} - n - 1$ se scrie în baza 3 folosind cel puțin o cifră 1. Deoarece $3^{k+1} - 1 = \overline{22\ldots 2}_{(3)}$, unde cifra 2 apare de $k+1$ ori, dacă $n = \overline{2a_{k-1}\ldots a_1 a_0}_{(3)}$, atunci $3^{k+1} - n - 1 = \overline{b_{k-1}\ldots b_1 b_0}_{\,(3)}$, unde $b_i = 2 - a_i$, pentru orice $i = \overline{0, k-1}$. Cum cel puțin una dintre cifrele a_0, a_1, ..., a_{k-1} este egală cu 1, printre cifrele $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ există una egală cu 1.

Așadar, un număr nenul este simpatic dacă și numai dacă scrierea sa în baza 3 conține doar cifrele 0 și 2. Numerele simpatice mai mici decât 3^{2022} se scriu în baza 3 sub forma $\overline{a_{2021}a_{2020}\ldots a_1 a_0}$, unde cifrele a_i, $0 \leqslant i \leqslant 2021$, pot fi 0 sau 2, dar nu toate nule. Cum fiecare cifră poate lua două valori, numărul de numere simpatice mai mici decât 3^{2022} este $2^{2022} - 1$.

Această problemă s-a dovedit a fi destul de dificilă, puțini concurenți reușind scoruri de cel puțin 7 puncte. Aida, Victor și Radu au dat soluții complete, obținând punctaj maxim (10 puncte), iar Andrei a avut o mică scăpare, fiind depunctat cu un punct. Toți și-au asigurat însă, medaliile de aur. David a obținut 5 puncte, pentru un progres semnificativ în problemă, iar Emanuel 2 puncte, pentru ideea formării perechilor de tipul $\{x, 3^k - x\}$.