Barajele de selecție a echipei Republicii Moldova pentru OBMJ 2022

14-16 mai 2022

Problema BJ1. Rezolvaţi în mulţimea **R** ecuaţia

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=4\,.$$

Задача BJ1. Решите во множестве **R** уравнение

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}-\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}=4\,.$$

Soluția 1. Evident, conform DVA (domeniul valorilor admisibile), avem $x>0$.

Copiem ecuația sub forma

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=4+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,.$$

Estimăm partea stângă a ecuației date

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\geq 3\cdot 2=6,$$

cu egalitate doar pentru $x=1$.

Estimăm partea dreaptă a ecuației date (în DVA):

$$4+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\leq 6 \iff \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\leq 2 \iff x+1\leq 2\cdot\sqrt{x^2-x+1} \iff$$

$$(x+1)^2\leq 4\cdot(x^2-x+1) \iff 4x^2-4x+4-(x^2+2x+1)\geq 0 \iff 3(x-1)^2\geq 0.$$

Ultima inegalitate, deci, și prima, sunt adevărate pentru orice $x>0$.

Astfel egalitatea dată este adevărată dacă și numai dacă

$$\frac{3x+3}{\sqrt{x}}=6=4+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,,$$

iar aceasta are loc doar pentru $x=1$. Deci, $S=\{\,1\,\}$.□

Soluția 2. Cum $x>0$, iar $x^2-x+1=(x-0{,}5)^2+0{,}75>0$, obínem că DVA al ecuației din enunț este intervalul $(0,+\infty)$. Scriem ecuația din enunț în următoarea formă echivalentă pe DVA:

$$\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{4}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,.$$

Dintr-o inegalitate adevărată obținem în DVA o altă inegalitate adevărată:

$$(x-1)^2\geq 0 \iff x^2-2x+1\geq 0 \iff x^2-x+1\geq x>0 \iff \sqrt{x^2-x+1}\geq\sqrt{x}.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x=1$. Obținem inegalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \le \frac{1}{\sqrt{x}}. \qquad (1)$$

Din MA-MG avem $\frac{x+1}{2} \ge \sqrt{x}$. Egalitatea are loc dacă și numai dacă $x = 1$. Avem inegalitatea

$$\frac{2}{x+1} \le \frac{1}{\sqrt{x}}. \qquad (2)$$

Din inegalitățile (1) și (2) obținem estimările

$$\frac{4}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} = 2\cdot\frac{2}{x+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}} \le \frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

Cum inegalitățile (1) și (2) devin egalități doar pentru $x = 1$, rezultă că ecuația din enunț are o singură soluție $x = 1$. Deci, $S = \{ 1 \}$.□

Problema BJ2. Fie numărul natural n ($n \ge 2$). Pe tablă sunt scrise toate numerele naturale de la 1 până la n, inclusiv, într-o ordine oarecare: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Determinați toate numerele naturale n ($n \ge 2$), pentru care produsul

$$P = (1 + a_1)\cdot(2 + a_2)\cdot \dots \cdot(n + a_n)$$

oricând este un număr par, oricare ar fi aranjarea numerelor scrise pe tablă.

Задача BJ2. Дано натуральное число n ($n \ge 2$). На доске написаны все натуральные числа от 1 до n, включительно, в некотором порядке: $a_1, a_2, \dots, a_n$. Определите все натуральные числа n ($n \ge 2$), для которых произведение

$$P = (1 + a_1)\cdot(2 + a_2)\cdot \dots \cdot(n + a_n)$$

всегда является чётным числом, какой бы ни была расстановка написанных на доске чисел.

Soluție. Produsul P este un număr par, dacă și numai dacă cel puțin un factor din acest produs este un număr par.

Vom arăta că pentru orice număr natural impar $n = 2k + 1$ ($k \ge 1$) produsul P este oricând un număr par. În acest caz printre numerele $1, 2, \dots, n$ există $k + 1$ numere impare și k numere pare. Rezultă că există o pereche de numere (i, a_i), în care ambele numere sunt impare (în caz contrar am obține că pentru $k + 1$ numere impare distincte se vor găsi $k + 1$ numere pare distincte, contradicție). Prin urmare, există cel puțin un factor $(i + a_i)$ care este număr par și produsul P, de asemenea, este un număr par.

Să arătam că pentru orice număr natural par $n = 2k$ $k \ge 1$ afirmația nu mai este adevărată. Există o aranjare a tuturor numerelor naturale de la 1 până la n pe tablă astfel, încât produsul P să fie un număr impar. De exemplu, luăm aranjarea: $2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots, 2k, 2k - 1$, adică

$$a_i = \begin{cases} 2j+2, & \text{dacă } i = 2j+1, \\ 2j-1, & \text{dacă } i = 2j. \end{cases}$$

În acest caz, fiecare factor $(i + a_i)$ este un număr impar, și produsul

$$P = (1+2)\cdot(2+1)\cdot(3+4)\cdot(4+3)\cdot\ldots\cdot(2k+2k-1)$$

de asemenea, este un număr impar.

Răspuns: toate numerele naturale impare n $(n \geq 3)$.□

Problema BJ3. Cercurile ω_1 și ω_2 se intersectează în punctele *A* și *B*. Prin punctul *B* este dusă o dreaptă, care intersectează din nou cercurile ω_1 și ω_2 în punctele *C* și, respectiv, *D*. Punctul *E*, situat pe cercul ω_1, satisface relația $CE = CB$, iar punctul *F*, situat pe cercul ω_2, satisface relația $DB = DF$. Dreapta *BF* intersectează din nou cercul ω_1 în punctul *P*, iar dreapta *BE* intersectează din nou cercul ω_2 în punctul *Q*. Arătați că punctele *A*, *P* și *Q* sunt coliniare.

Задача BJ3. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках *A* и *B*. Через точку *B* проведена прямая, которая пересекает вновь окружности ω_1 и ω_2 в точках *C* и *D* соответственно. Точка *E*, расположенная на окружности ω_1, удовлетворяет условию $CE = CB$, а точка *F*, расположенная на окружности ω_2, удовлетворяет условию $DB = DF$. Прямая *BF* пересекает вновь окружность ω_1 в точке *P*, а прямая *BE* пересекает вновь окружность ω_2 в точке *Q*. Докажите, что точки *A*, *P* и *Q* коллинеарны.

Soluție. Cum triunghiul *BFD* este isoscel, iar patrulaterul *BCEP* este inscriptibil, avem relațiile:

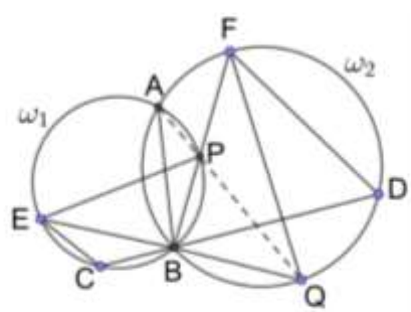
$$m\,(\angle BFD) = m\,(\angle DBF) = 180^0 - \ m\,(\angle CBF) = 180^0 - \ m\,(\angle CBP) = m\,(\angle CEP)\,,$$

$$m\,(\angle BFD) = m\,(\angle CEP) \quad \Longrightarrow \quad m\,(\angle BFQ) + m\,(\angle QFD) = m\,(\angle CEB) + m\,(\angle BEP)\,.$$

Deoarece triunghiul *BCE* este isoscel, iar unghiurile *CBE* și *QBD* sunt opuse la vârf, obținem relațiile:

$$m(\angle CEB) = m(\angle CBE) = m(\angle QBD) =$$

$$m(\angle QFD) \quad \Longrightarrow \quad m(\angle BEP) = m(\angle BFQ).$$



Atunci, în cercul ω_1 avem $m(\angle BEP) = m(\angle BAP)$, iar în cercul ω_2 avem $m(\angle BFQ) = m(\angle BAQ)$. Din $m(\angle BAP) = m(\angle BAQ)$ și faptul că punctele *P* și *Q* sunt de aceeași parte a dreptei *AB* rezultă că punctele *A*, *P* și *Q* sunt coliniare.□

Problema BJ4. Numărul rațional $\frac{m}{n}$ admite reprezentarea

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1},$$

unde *p* $(p > 2)$ este un număr prim. Arătați că numărul *m* este divizibil cu *p*.

Задача BJ4. Рациональное число $\frac{m}{n}$ допускает представление

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1},$$

где p $(p > 2)$ является простым числом. Докажите, что число m делится на p.

Soluție. Menționăm că numărul prim p este impar. Suma din dreapta are un număr par de termeni, pe care îi grupăm în perechi:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1} =$$

$$\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\frac{p-1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}}\right) =$$

$$\frac{p}{1 \cdot (p-1)} + \frac{p}{2 \cdot (p-2)} + \cdots + \frac{p}{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}} =$$

$$\frac{pk}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot \frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2} \cdot \ldots \cdot (p-2) \cdot (p-1)} = \frac{pk}{(p-1)!},$$

unde k este un număr natural nenul. Din egalitatea $m \cdot (p-1)! = npk$ și faptul că p este un număr prim, rezultă că m se divide cu p.□

Problema BJ5. Determinați toate numerele naturale nenule n, pentru care numărul $\sqrt{n! + 5}$ este un număr natural. (Notație: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ pentru orice număr natural nenul n.)

Задача BJ5. Определите все натуральные ненулевые числа n, для которых число $\sqrt{n! + 5}$ является натуральным числом. (Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ для любого натурального ненулевого числа n.)

Soluție. Vom arăta că nu există astfel de numere naturale nenule n.

Numărul $\sqrt{n! + 5}$ este un număr natural, dacă și numai dacă numărul $a = n! + 5$ este un pătrat perfect.

Pentru $1 \leq n \leq 6$ se verifică lesne că numărul respectiv a nu este un pătrat perfect:

$$n = 1,\ a = 1! + 5 = 1 + 5 = 6,\quad n = 2,\ a = 2 + 5 = 7,\quad n = 3,\ a = 6 + 5 = 11,$$

$$n = 4,\ a = 24 + 5 = 29,\quad n = 5, a = 120 + 5 = 125,\quad n = 6, a = 720 + 5 = 725.$$

Pentru $7 \leq n \leq 9$ numărul

$$a = n! + 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n + 5 = 5 \cdot (24 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n + 1) = 5b$$

este divizibil cu 5.

Numărul a va fi un pătrat perfect dacă și numai dacă numărul $b = 24 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n + 1$ este de forma $b = 5m^2$, unde m este un număr natural.

Vom arăta ca pentru $7 \leq n \leq 9$ numărul b nu se divide cu 5 sau nu are forma necesară. Se poate verifica în mod direct. Noi vom folosi congruențele (mod 5):

$$n = 7, b = 24 \cdot 6 \cdot 7 + 1 \equiv (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 1 = -1 \equiv 4\ (mod\ 5);$$

$$n = 8, b = 24 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 + 1 = 8065 = 5 \cdot 1613,$$

dar numărul 1613 nu este un pătrat perfect (niciun pătrat perfect nu are în scrierea sa ultima cifră 3);

$$n = 9, b = 24 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 + 1 \equiv (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 = -23 \equiv 2\ (mod\ 5).$$

Pentru orice $n \geq 10$ numărul $b = 24 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot n + 1$ se termină cu cifra 1 și, deci, nu se divide cu 5.

Prin urmare, nu există niciun număr natural nenul n, pentru care numărul $\sqrt{n! + 5}$ este un număr natural. □

Problema BJ6. Numerele nenegative x, y, z satisfac relația $x + y + z = 3$. Aflați cea mai mică valoare numerică posibilă și cea mai mare valoare numerică posibilă pentru expresia

$$E(x, y, z) = \sqrt{x(y + 3)} + \sqrt{y(z + 3)} + \sqrt{z(x + 3)}\,.$$

Задача BJ6. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют соотношению $x + y + z = 3$. Найдите наименьшее возможное числовое значение и наибольшее возможное числовое значение для выражения

$$E(x, y, z) = \sqrt{x(y + 3)} + \sqrt{y(z + 3)} + \sqrt{z(x + 3)}\,.$$

Soluție. Avem

$$2E(x, y, z) = \sqrt{4x(y + 3)} + \sqrt{4y(z + 3)} + \sqrt{4z(x + 3)} \ \leq$$

$$\frac{4x + y + 3}{2} + \frac{4y + z + 3}{2} + \frac{4z + x + 3}{2} = \frac{5(x + y + z) + 9}{2} = 12.$$

Rezultă că $E(x, y, z) \leq 6$. Cum $E(1,1,1) = 6$, avem $maxE(x, y, z) = 6$.

Din relațiile $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ și $x + y + z = 3$ obținem

$$x + 2y + z = 3 + y \ \Longrightarrow\ x(y + 3) = x^2 + 2xy + zx \geq x^2,$$

$$x + y + 2z = 3 + z \ \Longrightarrow\ y(z + 3) = xy + y^2 + 2yz \geq y^2,$$

$$2x + y + z = 3 + x \ \Longrightarrow\ z(x + 3) = 2xz + yz + z^2 \geq z^2.$$

Atunci

$$\sqrt{x(y + 3)} \ \geq x, \sqrt{y(z + 3)} \ \geq \ y, \qquad \sqrt{z(x + 3)} \ \geq z \ \Longrightarrow\ E(x, y, z) \geq x + y + z = 3.$$

Cum $E(3,0,0) = 3$, avem $minE(x, y, z) = 3$.

Astfel, cea mai mică valoare numerică posibilă a expresiei $E(x, y, z)$ este egală cu 3, iar cea mai mare valoare numerică posibilă a expresiei este egală cu 6. □

Problema BJ7. O programă funcționează în modul următor. Dacă *la intrare* este dat un număr natural n ($n \geq 2$), atunci programa efectuează consecutiv următoarea procedură: ea determină cel mai mare divizor propriu al numărului n (adică, diferit de 1 și n) și îl scade din numărul n, apoi aplică din nou aceeași procedură la rezultatul obținut și tot așa mai departe. Dacă programa nu poate găsi niciun divizor propriu al numărului dat la o etapă, atunci ea se oprește și scoate *la ieșire* numărul total *m* de proceduri efectuate (acest număr poate fi egal cu 0). La intrare a fost dat numărul $n = 13^{13}$. Determinați numărul respectiv *m* la ieșire.

Задача BJ7. Некоторая программа работает следующим образом. Если *на входе* дано натуральное число n ($n \geq 2$), то программа последовательно осуществляет следующую процедуру: она определяет наибольший собственный делитель числа *n* (т.е., отличный от 1 и n) и вычитывает его из числа n, затем заново применяет ту же процедуру к полученному результату и так далее. Если программа не может найти ни одного собственного делителя данного числа на некотором этапе, то она останавливается и выдаёт *на выходе* общее число m осуществлённых процедур (это число может быть равным 0). На входе было дано число $n = 13^{13}$. Определите соответствующее число m на выходе.

Soluție. Fie $n_0 = n = 13^{13}$. Vom nota prin n_i numărul obținut după procedura *i*.

Cum 13 este un număr prim, atunci cel mai mare divizor propriu al numărului 13^{13} este numărul 13^{12}. Atunci

$$n_1 = 13^{13} - 13^{12} = 13 \cdot 13^{12} - 13^{12} = (13 - 1) \cdot 13^{12} = 12 \cdot 13^{12}.$$

Observăm că dacă numărul *m* este un număr par, atunci cel mai mare divizor propriu al lui m este numărul $\frac{m}{2}$. Cum n_1 este un număr par, rezultă că cel mai mare divizor propriu al lui $n_1 = 12 \cdot 13^{12}$ este numărul $6 \cdot 13^{12}$, iar $n_2 = n_1 - 6 \cdot 13^{12} = 6 \cdot 13^{12}$, care, de asemenea, este un număr par. Cel mai mare divizor propriu al lui n_2 este numărul $3 \cdot 13^{12}$, de unde obținem

$$n_3 = n_2 - 3 \cdot 13^{12} = 3 \cdot 13^{12}.$$

Cel mai mare divizor propriu al lui n_3 este numărul 13^{12}, de unde obținem

$$n_4 = n_3 - 13^{12} = 2 \cdot 13^{12}.$$

Cum n_4 este un număr par, rezultă că cel mai mare divizor propriu al lui este numărul 13^{12}, fapt care implică egalitatea

$$n_5 = n_4 - 13^{12} = 13^{12}.$$

Observăm că prin 5 proceduri din numărul inițial 13^{13} am obținut numărul 13^{12}. După alte 5 proceduri vom obține în mod analog 13^{11} și, continuând procesul, după $5 \cdot 12 = 60$ de proceduri vom obține numărul 13. Deoarece după 60 de proceduri se obține numărul prim 13, care nu are divizori proprii, rezultă că programa se va opri după 60 de proceduri. Astfel, numărul la ieșire este $m = 60$.□

Problema BJ8. Fie triunghiul *ABC* și centrul *I* al cercului înscris în acest triunghi. Punctul *M*, situat pe tangenta dusă în punctul *B* la cercul circumscris triunghiului *ABC*, satisface relația $AB = MB$. Punctul *N*, situat pe tangenta dusă în punctul *C* la același cerc, satisface relația $AC = NC$. Punctele *M*, *A* și *N* sunt situate de aceeași parte a dreptei *BC*. Demonstrați că

$$m(\angle BAC) + m\,(\angle MIN) = 180^0.$$

Задача BJ8. Задан треугольник *ABC* и центр *I* окружности, вписанной в этот треугольник. Точка *M*, расположенная на касательной, проведённой в точке *B* к описанной к треугольнику *ABC* окружности, удовлетворяет соотношению $AB = MB$. Точка *N*, расположенная на касательной, проведённой в точке *C* к той же окружности, удовлетворяет сотношению $AC = NC$. Точки *M*, *A* и *N* лежат по одну и ту же сторону от прямой *BC*. Покажите, что

$$m(\angle BAC) + m\,(\angle MIN) = 180^0.$$

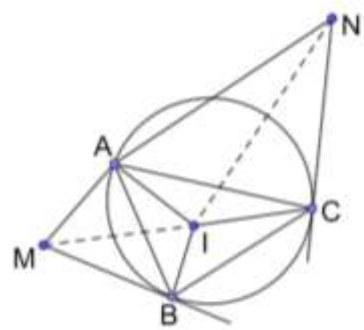
Soluție. Notăm $m(\angle BAC) = \alpha$, $m(\angle ABC) = \beta$, $m(\angle ACB) = \gamma$. Cum *I* este punctul de intersecție a bisectoarelor interioare ale triunghiului *ABC*, obținem relațiile:

$$m(\angle AIC) = 180^0 - m(\angle IAC) - m(\angle ICA) = 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} =$$

$$180^0 - \frac{\alpha+\gamma}{2} = 180^0 - \frac{180^0 - \beta}{2} = 90^0 + \frac{\beta}{2}, \qquad (1)$$

$$m(\angle AIB) = 180^0 - m(\angle IAB) - m(\angle IBA) = 180^0 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} =$$

$$180^0 - \frac{\alpha+\beta}{2} = 180^0 - \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 + \frac{\gamma}{2}\ .$$



Cum $m(\angle ABC) = \beta = m(\angle ACN)$, $m(\angle ACB) = \gamma = m(\angle ABM)$, iar $AC = NC$, $AB = MB$, atunci obținem egalitățile:

$$m(\angle ANC) = m(\angle CAN) = 90^0 - \frac{1}{2}\cdot m(\angle ACN) = 90^0 - \frac{1}{2}\cdot m(\angle ABC) = 90^0 - \frac{\beta}{2}\,, \qquad (2)$$

$$m(\angle AMB) = m(\angle MAB) = 90^0 - \frac{1}{2}\cdot m(\angle ABM) = 90^0 - \frac{1}{2}\cdot m(\angle ACB) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}.$$

Din relațiile (1) și (2) și din faptul că punctele *M*, *A* și *N* sunt situate de aceeași parte a dreptei *BC* rezultă egalitățile:

$$m(\angle AIC) + m\,(\angle ANC) = 180^0,\ \ m(\angle AIB) + m(\angle AMB) = 180^0,$$

adică patrulaterele *AICN* și *AIBM* sunt inscriptibile. Atunci obținem

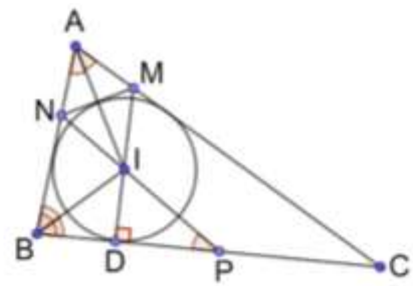
$$m(\angle MIN) = m(\angle AIM) + m(\angle AIN) = m(\angle ABM) + m(\angle ACN) = \gamma + \beta = 180^0 - \alpha \implies$$

$$m(\angle BAC) + m(\angle MIN) = 180^0. \square$$

Problema BJ9. Cercul înscris în triunghiul *ABC* cu centrul *I* atinge latura *BC* în punctul *D*. Dreapta *DI* intersectează latura *AC* în punctul *M*. Tangenta dusă din *M* la cercul înscris, diferită de *AC*, intersectează latura *AB* în punctul *N*. Dreapta *NI* intersectează latura *BC* în punctul *P*. Arătați că $AB = BP$.

Задача BJ9. Окружность с центром *I*, вписанная в треугольник *ABC*, касается стороны *BC* в точке *D*. Прямая *DI* пересекает сторону *AC* в точке *M*. Касательная, проведённая через *M* к вписанной окружности, отличная от *AC*, пересекает сторону *AB* в точке *N*. Прямая *NI* пересекает сторону *BC* в точке *P*. Покажите, что $AB = BP$.

Soluție. Cercul de centru *I* este cerc exînscris al triunghiului *AMN*.



Notăm $m(\angle BAC) = \alpha$, $m(\angle ABC) = \beta$, $m(\angle AMN) = \varphi$, $m(\angle ANM) = \psi$. Atunci $\alpha = m(\angle BAC) = 180^0 - \varphi - \psi$. Avem relațiile

$$m(\angle MIN) = 180^0 - m(\angle NMI) - m(\angle MNI) =$$

$$180^0 - \frac{1}{2} \cdot m(\angle NMC) - \frac{1}{2} \cdot m(\angle MNB) =$$

$$180^0 - \frac{1}{2} \cdot (180^0 - \varphi) - \frac{1}{2} \cdot (180^0 - \psi) = \frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{180^0 - \alpha}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \ .$$

Cum unghiurile *MIN* și *PID* sunt opuse la vârf, $m(\angle PDI) = 90^0$, iar BI este bisectoarea unghiului *ABC*, obținem egalitățile

$$m(\angle IPD) = m(\angle IPB) = \frac{\alpha}{2}, m(\angle\, IBP) = \frac{1}{2} \cdot m(\angle ABC) = \frac{\beta}{2},$$

$$m(\angle IAB) = \frac{\alpha}{2},\ \ m(\angle IBA) = \frac{\beta}{2}.$$

Rezultă că triunghiurile *ABI* și *PBI* sunt congruente, de unde obținem $AB = BP$.□

Problema BJ10. Rezolvați în mulțimea **R** ecuația

$$2 \cdot [x] \cdot \{x\} = x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{11}{16},$$

unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă și, respectiv, partea fracționară a numărului real x.

Задача BJ10. Решите во множестве **R** уравнение

$$2 \cdot [x] \cdot \{x\} = x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{11}{16},$$

где $[x]$ и $\{x\}$ представляют целую часть и дробную часть, соответственно, действительного числа x.

Soluție. Dacă $x \in \mathbf{R}$, atunci $x = m + t$, unde $m = [x] \in \mathbf{Z}$, iar $t = \{x\} \in [0, 1)$. Egalitatea din enunț se scrie astfel:

$$2mt = (m+t)^2 - \frac{3}{2}\cdot(m+t) - \frac{11}{16}\ .$$

Această egalitate poate fi scrisă în forma

$(4m-3)^2 + (4t-3)^2 = 29.$

Cum $4m-3 \in \mathbf{Z}$, iar $-3 \le 4t-3 < 1$, avem $(4t-3)^2 \in [0,9]$ și $(4m-3)^2 \in [20,29]$. Rezultă că au loc egalitățile $(4m-3)^2 = 25$ și $(4t-3)^2 = 4$. Avem $4m-3 \in \{-5,5\}$, iar $4n-3 \in \{-2,2\}$.

Dacă $4m-3=-5$, atunci $m=-0{,}5 \notin \mathbf{Z}$, contradicție.

Dacă $4m-3=5$, atunci $m=2\in\mathbf{Z}$.

Dacă $4t-3=-2$, atunci $t=0{,}25 \in [0,1)$. Dacă $4t-3=2$, atunci $t=1{,}25 \notin [0,1)$, contradicție.

Astfel, obținem o soluție unică cu $m=2$, $t=0{,}25$ și $x=2{,}25$. Verificarea arată că $x=2{,}25$ este soluție a ecuației din enunț. Rezultă că $S=\{2{,}25\}$.□

Problema BJ11. Determinați toate perechile ordonate de numere întregi pozitive (m,n), astfel încât $2m$ divide numărul $3n-2$, iar $2n$ divide numărul $3m-2$.

Задача BJ11. Определите все упорядоченные пары целых положительных чисел (m,n) такие, что $2m$ делит число $3n-2$, а $2n$ делит число $3m-2$.

Soluție. Fie $m,n\in\mathbf{N}^*$. Atunci $3m-2\in\mathbf{N}^*$, $3n-2\in\mathbf{N}^*$. Din enunț rezultă că există $p,q\in\mathbf{N}^*$, astfel încât simultan sunt juste egalitățile

$$3m-2=2np, \quad (1) \qquad 3n-2=2mq \quad (2).$$

Înmulțim egalitățile (1) și (2) parte cu parte și obținem relațiile

$$(3m-2)(3n-2)=4mnpq \iff 9mn-6(m+n)+4=4mnpq \iff$$

$$mn(9-4pq)=6(m+n)-4\ . \qquad (3)$$

Cum $m,n\in\mathbf{N}^*$, rezultă că $m+n\ge 2 \implies 6(m+n)-4\ge 8$. Din egalitatea (3) obținem că

$$9-4pq\ge 1 \implies 4pq\le 8 \implies pq\le 2.$$

Cum $p,q\in\mathbf{N}^*$, rezultă că $pq\in\{\,1,2\,\}$.

Dacă $pq=1$, atunci $p=1$, $q=1$ și din egalitățile (1) și (2) avem $m=2$, $n=2$.

Dacă $pq=2$, atunci $p=2$, $q=1$ sau $p=1$, $q=2$. Din egalitățile (1) și (2) obținem $m=14$, $n=10$ sau $m=10$, $n=14$.

Astfel, există doar 3 perechi ordonate de numere întregi pozitive (m,n) care verifică enunțul problemei: $(\,2,\ 2\,)$, $(14,\ 10)$, $(10,14)$.□

Problema BJ12. Fie două numere întregi distincte p și q. Pe tablă este scris trinomul pătrat $x^2 + px + q$. La fiecare *pas* se șterge un număr: sau coeficientul de pe lângă x, sau termenul liber, iar în locul numărului șters se scrie un număr, care se obține din cel șters prin adăugarea sau scăderea numărului 1. După câțiva astfel de pași pe tablă a apărut trinomul pătrat $x^2 + qx + p$. Arătați că, la o etapă, pe tablă a fost scris un trinom pătrat, ale cărui ambele rădăcini sunt numere întregi.

Задача BJ12. Пусть даны два целых различных числа p и q. На доске написан квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$. На каждом *шаге* стирается одно число: либо коэффициент при x, либо свободный член, а вместо удалённого числа пишется число, которое получается из удалённого числа добавлением или вычитанием числа 1. После нескольких таких шагов на доске появился квадратный трёхчлен $x^2 + qx + p$. Покажите, что, на некотором этапе, на доске был написан квадратный трёхчлен, оба корня которого являются целыми числами.

Soluție. Notăm șirul de trinoame pătrate scrise consecutiv pe tablă prin $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$, unde

$$P_i(x) = x^2 + a_i x + b_i \quad (0 \le i \le n),$$

în particular,

$$P_0(x) = x^2 + a_0 x + b_0 = x^2 + px + q, \;\; P_n(x) = x^2 + a_n x + b_n = x^2 + qx + p.$$

Toate trinoame pătrate sunt cu coeficienții întregi ($a_i, b_i \in \mathbf{R}$).

Conform condițiilor, trecerea de la trinomul pătrat $P_i(x)$ la trinomul pătrat $P_{i+1}(x)$ înseamnă că

$$\begin{cases} |a_{i+1} - a_i| = 1, \\ |b_{i+1} - b_i| = 0, \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} |a_{i+1} - a_i| = 0, \\ |b_{i+1} - b_i| = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Considerăm șirul finit de numere întregi $(t_i)_{i=0}^{n}$, $t_i = P_i(-1) = 1 - a_i + b_i$.

Din (1) rezultă că pentru orice i $(0 \le i \le n-1)$ avem

$$|t_{i+1} - t_i| = |(b_{i+1} - b_i) - (a_{i+1} - a_i)| = 1. \qquad (2)$$

Fără a pierde din generalitate putem presupune că $p > q$ (în mod analog se studiază cazul $p < q$).

Deoarece $p - q$ este un număr întreg, rezultă că $p - q \ge 1$ și $q - p \le -1$.

Vom arăta că oricând există j astfel încât $t_j = P_j(-1) = 0$. Presupunem contrariul, și anume, că pentru orice j avem $t_j \ne 0$. Cum $t_0 = P_0(-1) = 1 - p + q \le 0$ (mai exact, $t_0 < 0$), iar $t_n = P_n(-1) = 1 - q + p \ge 2$, rezultă că există i astfel încât $t_i < 0$, și, deci, $t_i \le -1$, iar $t_{i+1} > 0$, și, deci, $t_{i+1} \ge 1$ (luăm, de exemplu, cel mai mare indice i pentru care $t_i < 0$). Dar, în acest caz, $|t_{i+1} - t_i| \ge 2$, ceea ce contrazice (2).

Rezultă că oricând există j astfel încât $t_j = P_j(-1) = 0$. Astfel, polinomul respectiv $P_j(x) = x^2 + a_j x + b_j$ are o rădăcină $x_1 = -1$, iar a doua rădăcină, conform teoremei lui Viète, de asemenea este un număr întreg $x_2 = \frac{b_j}{x_1} = -b_j$.

Prin urmare, la o etapă, pe tablă apare cel puțin un polinom $P_j(x) = x^2 + a_j x + b_j$ cu ambele rădăcini numere întregi $x_1 = -1$ și $x_2 = -b_j$.□