Problema săptămânii 298

Arătaţi că dacă $a, b, c \geq -3$ şi $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, atunci $a + b + c \leq 3$.

Soluţia 1: Fie $x, y, z \geq 0$ astfel încât $a = x - 3$, $b = y - 3$, $c = z - 3$. Ştim că $(x-3)^3+(y-3)^3+(z-3)^3 = 0$, adică $x^3+y^3+z^3-9(x^2+y^2+z^2)+27(x+y+z)-81 = 0$, sau $\left(x^3 - 9x^2 + \frac{81}{4}x\right) + \left(y^3 - 9y^2 + \frac{81}{4}y\right) + \left(z^3 - 9z^2 + \frac{81}{4}z\right) + \frac{27}{4}(x + y + z) - 81 = 0$. Dar $\left(x^3 - 9x^2 + \frac{81}{4}x\right) + \left(y^3 - 9y^2 + \frac{81}{4}y\right) + \left(z^3 - 9z^2 + \frac{81}{4}z\right) = x\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + y\left(y - \frac{9}{2}\right)^2 + z\left(z - \frac{9}{2}\right)^2 \geq 0$, deci $\frac{27}{4}(x + y + z) - 81 \leq 0$, adică $x + y + z \leq 12$, ceea ce revine la $a + b + c \leq 3$.

Egalitate am avea atunci când $x, y, z \in \left\{0, \frac{9}{2}\right\}$, adică $a, b, c \in \left\{-3, \frac{3}{2}\right\}$, dar trei astfel de numere nu au suma cuburilor egală cu 0.

Soluţia 2: (aceeaşi cu cea de mai sus, dar fără substituţie)

Avem $4(a + 3)\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$, $\forall\, a \geq -3$. Scriind încă două relaţii analoage şi adunându-le obţinem $4(a^3 + b^3 + c^3) - 27(a + b + c) + 81 \geq 0$, deci, folosind condiţia $a^3 + b^3 + c^3 = 0$, obţinem $a + b + c \leq 3$.

Comentariu:

De unde ne vine ideea să considerăm taman expresia $4(a + 3)\left(a - \frac{3}{2}\right)^2$?

Coeficientul 4 nu este important, rolul său a fost numai acela de a face coeficienţii finali să fie întregi. Variabilele a, b, c sunt separate atât în relaţia dată cât şi în inegalitatea de demonstrat (nu avem termeni în care să apară variabile diferite, de gen ab sau a^2c). Ne gândim la o spargere: să scriem o inegalitate într-o singură variabilă care, adunată cu analoagele ei, să dea tocmai ce ne dorim. În această inegalitate vrem să ne apară a^3 şi a, dar nu şi a^2. Factorul $a + 3$ este normal să apară: astfel folosim ipoteza $a \geq -3$. Ca să apară a^3, mai trebuie două paranteze. Aşadar, vrem $(a+3)(a-u)(a-v) \geq 0$, $\forall\, a \geq -3$. Desfăcând parantezele, coeficientul lui a^2 este $u+v-3$. Vrem ca acest coeficient să fie 0. Dacă $u < v$, atunci $v > \frac{3}{2} > -3$ şi expresia $(a + 3)(a - u)(a - v)$ va fi negativă pentru $a \in (u, v)$. La fel, nu se poate nici $v < u$, deci trebuie neapărat $u = v = \frac{3}{2}$.

AŞA am ajuns să scriem tocmai inegalitatea $(a + 3)\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$.

Soluţia 3: (*Marius Stănean*)
Fie $x = \frac{a}{3}$, $y = \frac{b}{3}$, $z = \frac{c}{3}$. Atunci $x, y, z \geq -1$ şi $x^3 + y^3 + z^3 = 0$. Trebuie să arătăm că $x + y + z \leq 1$.
Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $x \leq y \leq z$. Din $x^3 + y^3 + z^3 = 0$ rezultă că $x \leq 0 \leq z$. Distingem două cazuri:
1. $-1 \leq x \leq y \leq 0 \leq z$; avem

$$x + y + z \leq x^3 + y^3 + z = z - z^3 \overset{(*)}{<} \frac{1}{2} < 1.$$

2. $-1 \leq x \leq 0 \leq y \leq z$; avem

$$x + y + z \leq x^3 + y + z = y - y^3 + z - z^3 \overset{(*)}{<} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

La stabilirea inegalităţilor marcate cu $(*)$ s-a folosit inegalitatea $t - t^3 < \frac{1}{2}$, $\forall\, t > 0$.
Într-adevăr, pentru $t \geq 1$ ea este evidentă, iar pentru $t \in [0, 1)$ ea rezultă din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea geometrică:

$$t - t^3 = t(1-t)(1+t) = \frac{1}{2} \cdot t(2-2t)(1+t) < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t + (2-2t) + (1+t)}{3}\right)^3 = \frac{1}{2}.$$

Soluţia 4: (*Titu Zvonaru*)
Numerele a, b, c nu pot avea toate același semn. Este suficient să analizăm două cazuri:
i) $a \geq 0$, $b, c \leq 0$; notăm $y = -b$, $z = -c$. Avem $0 \leq y, z \leq 3$, $a^3 = y^3 + z^3$ și trebuie să demonstrăm că $a \leq 3 + y + z$. Această ultimă inegalitate este adevărată deoarece pentru $y, z \geq 0$ avem $a = \sqrt[3]{y^3 + z^3} \leq y + z$.
ii) $a, b \geq 0$, $c \leq 0$; notăm $z = -c$. Avem $0 \leq z \leq 3$, $a^3 + b^3 = z^3$, $a, b \leq z \leq 3$ și trebuie să arătăm că $a + b \leq 3 + z$. Ultima inegalitate este adevărată în condițiile $a, b \leq z \leq 3$.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu, Marius Stănean, Emanuel Mazăre, Titu Zvonaru, Marius Valentin Drăgoi, Victor Vasile Dragoş, Aida Mitroi* şi *Denis Nica.*

Problem of the week no. 298

Let $a, b, c \geq -3$ be real numbers such that $a^3 + b^3 + c^3 = 0$. Prove that $a + b + c \leq 3$.

Solution 1: Let $x, y, z \geq 0$ be such that $a = x - 3$, $b = y - 3$, $c = z - 3$. We know that $(x-3)^3 + (y-3)^3 + (z-3)^3 = 0$, i.e. $x^3 + y^3 + z^3 - 9(x^2 + y^2 + z^2) + 27(x + y + z) - 81 = 0$, or

$$\left(x^3 - 9x^2 + \frac{81}{4}\,x\right) + \left(y^3 - 9y^2 + \frac{81}{4}\,y\right) + \left(z^3 - 9z^2 + \frac{81}{4}\,z\right) + \frac{27}{4}\,(x+y+z) - 81 = 0.$$

But $\left(x^3-9x^2+\frac{81}{4}x\right)+\left(y^3-9y^2+\frac{81}{4}y\right)+\left(z^3-9z^2+\frac{81}{4}z\right)=x\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+y\left(y-\frac{9}{2}\right)^2+z\left(z-\frac{9}{2}\right)^2\geq 0$, deci $\frac{27}{4}(x+y+z)-81\leq 0$, i.e. $x+y+z\leq 12$, which reduces to $a+b+c\leq 3$.
Equality holds when $x,y,z\in\left\{0,\frac{9}{2}\right\}$, i.e. $a,b,c\in\left\{-3,\frac{3}{2}\right\}$, but no three such numbers have the sum of their cubes equal to 0.

Solution 2: (the same as the first one, but without substitution)
We have $4(a+3)\left(a-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0, \forall\, a\geq -3$. Writing two more analogue relations and summing them yields $4(a^3+b^3+c^3)-27(a+b+c)+81\geq 0$, which, together with the condition $a^3+b^3+c^3=0$, leads to $a+b+c\leq 3$.

Solution 3: (*Marius Stănean*)
Put $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$, $z=\frac{c}{3}$. We have $x,y,z\geq -1$ and $x^3+y^3+z^3=0$ and we have to prove that $x+y+z\leq 1$.
Without loss of generality we may assume $x\leq y\leq z$. From $x^3+y^3+z^3=0$ it follows that $x\leq 0\leq z$. We distinguish two cases:
1. $-1\leq x\leq y\leq 0\leq z$; we have

$$x+y+z\leq x^3+y^3+z=z-z^3\overset{(*)}{<}\frac{1}{2}<1.$$

2. $-1\leq x\leq 0\leq y\leq z$; we have

$$x+y+z\leq x^3+y+z=y-y^3+z-z^3\overset{(*)}{<}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

For the majorizations denoted by $(*)$ we have used the inequality $t-t^3<\frac{1}{2}, \forall\, t>0$.
This is obvious if $t\geq 1$, while for $t\in[0,1)$ it follows from the AM-GM inequality:

$$t-t^3=t(1-t)(1+t)=\frac{1}{2}\cdot t(2-2t)(1+t)<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t+(2-2t)+(1+t)}{3}\right)^3=\frac{1}{2}.$$

Solution 4: (*Titu Zvonaru*)
Numbers a,b,c can not have the same sign. It is sufficient to analyze two cases:
i) $a\geq 0$, $b,c\leq 0$; denote $y=-b$, $z=-c$. We have $0\leq y,z\leq 3$, $a^3=y^3+z^3$ and we need to prove $a\leq 3+y+z$.
This last inequality is true because for $y,z\geq 0$ we have $a=\sqrt[3]{y^3+z^3}\leq y+z$.
ii) $a,b\geq 0$, $c\leq 0$; denote $z=-c$. We have $0\leq z\leq 3$, $a^3+b^3=z^3$, $a,b\leq z\leq 3$ and we need to prove $a+b\leq 3+z$. This follows from $a,b\leq z\leq 3$.