SOLUȚIE

Problema 1.
În planul α, considerăm dreptele distincte a, b şi c, oricare două neparalele. Presupunem că o dreaptă d face unghiuri congruente cu dreptele a, b şi c. Demonstraţi că d este perpendiculară pe planul α.

***

Soluţie.

Dacă $d \| \alpha$ sau $d \subset \alpha$, cum $(\widehat{d,a}) \equiv (\widehat{d,b}) \equiv (\widehat{d,c})$, rezultă că cel puţin două dintre dreptele a, b şi c sunt paralele, contradicţie cu ipoteza.

Fie $d \cap \alpha = \{O\}$ şi $P \neq O$ un punct pe dreapta d. Construim paralele prin O la dreptele a, b şi c, pe care considerăm punctele A, B şi C cu proprietăţile $OA = OB = OC$ şi $\widehat{POA} \equiv \widehat{POB} \equiv \widehat{POC}$.

Avem: $\Delta POA \equiv \Delta POB \equiv \Delta POC$ (cazul L.U.L.) $\Longrightarrow PA = PB = PC$.

Dacă O' este proiecţia lui P pe planul α, avem $\Delta PO'A \equiv \Delta PO'B \equiv \Delta PO'C$ (cazul C.I.), deci $O'A = O'B = O'C$.

Cum centrul cercului circumscris ΔABC este unic, avem $O = O'$, deci $d \perp \alpha$.

SOLUȚIE

Problema 2
Demonstrați că oricare af fi numerele reale $a, b, c > 0$, pentru care $a+b+c = 3$, este adevărată inegalitatea:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3a}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3b}} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ștefan-Ionel Dumitrescu

Soluție:

Flosind inegalitatea mediilor AM-GM, obținem:

$$\sqrt{b^3c} = \sqrt{b^2 \cdot bc} \leq \frac{b^2+bc}{2}$$

deci

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} \geq \frac{2a^2}{b^2+bc}$$

și analoagele.
Așadar, avem:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3a}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3b}} \geq 2\left(\frac{a^2}{b^2+bc} + \frac{b^2}{c^2+ca} + \frac{c^2}{a^2+ab}\right).$$

Folosind Inegalitatea Bergström -Titu Andreescu, găsim:

$$\frac{a^2}{b^2+bc} + \frac{b^2}{c^2+ca} + \frac{c^2}{a^2+ab} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

Ținând cont că $a+b+c = 3$ și $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ obținem:

$$\frac{a^2}{\sqrt{b^3c}} + \frac{b^2}{\sqrt{c^3a}} + \frac{c^2}{\sqrt{a^3b}} \geq 2\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{9}{a^2+b^2+c^2},$$

ceea ce trebuia demonstrat.
Avem egalitate dacă și numai dacă $a = b = c = 1$.

SOLUŢIE

Problema 3
Să se determine numerele reale a și b știind că $a+b \in \mathbb{Z}$ și $a^2+b^2=2$.

Romeo Ilie, Olimpiada Națională de Matematică 2001

Soluție.

Fie $t \in \mathbb{Z}$, $t=a+b$.
Deoarece $t^2 \leq 2\cdot(a^2+b^2)=4$ rezultă că $|t| \leq 2 \Leftrightarrow t \in \{-2,-1,0,1,2\}$.
Din faptul că $ab = \dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2} = \dfrac{t^2-2}{2}$, rezultă că a și b sunt soluțiile ecuației $x^2 - tx + \dfrac{t^2-2}{2} = 0$, $t \in \{-2,-1,0,1,2\}$. Rezolvând cele cinci ecuații corespunzătoare valorilor lui t deducem imediat că:

$$(a,b) \in \left\{(-1,-1),(1,1),(1,-1),(-1,1),\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right),\right.$$
$$\left.\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}.$$

SOLUȚIE

Problema 4

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Determinaţi valoarea minimă a expresiei

$$E(x) = |x-1| + |x-2| + ... + |x-n|,$$

când x parcurge mulţimea numerelor reale.

Aurel Bârsan

Soluţie:

Observăm mai întâi că, dacă $a < b$,

$$|x-a| + |x-b| = |a-x| + |x-b| \geq |(a-x) + (x-b)| = |a-b| = b-a,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x \in [a, b]$.

Cazul 1. $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Folosind obsevaţia anterioară, obţinem

$$E(x) = (|x-1|+|x-2k|)+...+(|x-k|+|x-(k+1)|) \geq (2k-1)+(2k-3)+...+1 = k^2, \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cum $E(x) = k^2$, pentru $x \in [k, k+1]$, rezultă $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} E(x) = k^2$.

Cazul 2. $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Analog,

$$E(x) = (|x-1|+|x-(2k+1)|)+...+(|x-k|+|x-(k+2)|)+|x-(k+1)| \geq$$

$$\geq 2k + (2k-2) + (2k-4) + ... + 2 + 0 = k(k+1), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Cum $E(k+1) = k(k+1)$, rezultă $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} E(x) = k(k+1)$.