SOLUȚIE

Problema 1.
Dacă P este un punct pe cercul circumscris triunghiului ABC și H este ortocentrul acestuia, arătați că mijlocul segmentului HP se află pe cercul lui Euler al triunghiului.

***

Soluţie:
Dacă O este centrul cercului circumscris și O_9 este centrul cercului lui Euler, s-a demonstrat în materialul de pregătire că O_9 este milocul segmentului OH. De asemenea, dacă D este mijlocul segmentului AH, atunci O_9D este linie mijlocie în triunghiul OAH, deci $O_9D = \dfrac{OA}{2}$, prin urmare raza cercului lui Euler este $\dfrac{R}{2}$, unde R este raza cercului circumscris.

Dacă M este mijlocul segmentului HP, atunci O_9M este linie mijlocie în triunghiul OPH, deci $O_9M = \dfrac{OP}{2} = \dfrac{R}{2}$, prin urmare M se află pe cercul lui Euler.

SOLUȚIE

Problema 2.
Determinați numerele întregi a, b, c pentru care

$$a^2+b+3<5a,\ b^2+c+3<5b,\ c^2+a+3<5c.$$

Dan Nedeianu, Gazeta Matematică

Soluţie:
Dacă x, y sunt numere întregi și $x<y$, atumci $x+1 \leq y$. Folosind această observație, rezultă

$$a^2+b+4 \leq 5a,\ b^2+c+4 \leq 5b,\ c^2+a+4 \leq 5c.$$

Adunând ultimele trei relații și grupând convenabil termenii obținem

$$(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2 \leq 0,$$

de unde rezultă $a=b=c=2$.
Aceste valori verifică relațiile inițiale, deci $(a, b, c)=(2,2,2)$.

SOLUȚIE

Problema 3.

Determinaţi numerele naturale nenule $x,\ y$ şi numărul prim p care verifică egaliatea:

$$x^{2021}+y^{2021}=pxy.$$

Aurel Bârsan

Soluţie:

Fie $d=(x,y)$, $x=da$, $y=db$, cu $(a,b)=1$. Înlocuind în relaţia dată obţinem

$$d^{2021}(a^{2021}+b^{2021})=d^2pab,$$

adică

$$d^{2019}(a^{2021}+b^{2021})=pab.\ (\star)$$

Rezultă $a|d^{2019}b^{2021}$. Dar cum $(a,b)=1$, rezultă $a|d^{2019}$. Analog $b|d^{2019}$. Cum $(a,b)=1$, rezultă $ab|d^{2019}$. Deci $d^{2019}=abk$. Înlocuind în $(\star)$, obţinem

$$abk(a^{2021}+b^{2021})=pab\Leftrightarrow k(a^{2021}+b^{2021})=p.$$

Rezultă $k=1$ şi $p=a^{2021}+b^{2021}=(a+b)(a^{2020}-a^{2019}b+\ldots+b^{2020})$.

Presupunând că $a\neq b$, de exemplu $a>b$, obţinem

$$a^{2020}-a^{2019}b+\ldots+b^{2020}=a^{2019}(a-b)+a^{2017}b^2(a-b)+\cdots+b^{2020}>1$$

și, cum $a+b>1$, obținem contradicţie cu faptul că p este prim.

Deci $a=b=1$ și atunci $p=2$ şi $x=y=1$.

SOLUȚIE

Problema 4.
Zece elevi primesc fiecare câte un cartonaș pe care este scrisă una dintre cifrele de la 0 la 9. Oricare doi elevi au cartonașe scrise cu cifre diferite. Determinați cel mai mare număr natural n pentru care cei zece elevi se pot așeza la o masă rotundă astfel încât, pentru orice elev, suma numerelor de pe cartonașul lui și cartonașele vecinilor săi să fie cel puțin n.

Cristian Mangra, Olimpiada Națională de Matematică 2008

Soluție.
Un singur elev primeste cartonașul cu cifra 9. Suma cifrelor de pe cartonașele celorlalți nouă este $0+1+...+8=36$. Pe de altă parte, suma cifrelor de pe cartonașele celorlalți nouă este cel puțin $n+n+n=3n$, deci $36 \geq 3n$, adică $n \leq 12$.
Deoarece pentru $n=12$ se găsesc configurații valide, de exemplu $0,9,3,7,2,5,6,1,8,4$, rezultă că $n=12$ este numărul căutat.