

Problema 1.

Într-un joc pe computer, avem o pistă formată din pătrățele unitate, de lungime $4n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Jucătorul pleacă din pătrățul 1 și se mișcă întotdeauna înainte, după următoarele reguli:

- din pătrățelele de forma $4a$, $4a + 1$, $4a + 3$, poate sări în pătrățul vecin sau în pătrățul situat la distanța 2;
- în pătrățelele de forma $4a + 2$ se află *lipici*, iar jucătorul nu se poate deplasa decât în pătrățul vecin.

În câte moduri se poate ajunge din pătrățul 1 în pătrățul $4n$?

Problema 2.

Spunem că perechea de numere reale nenule (a, b) este *interesantă* dacă $a + b$ și $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ sunt numere întregi nenule.

1. Arătați că există o infinitate de *perechi interesante*.
2. Determinați *perechile interesante* (a, b) cu proprietatea că cel puțin unul dintre numerele a^2 și b^2 este rațional.

Problema 3.

Determinați valorile întregi ale lui m pentru care ecuația

$$[x^2] - 2022x + m = 0$$

are un număr impar de soluții. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .)

Problema 4.

Fie $ABCD$ un tetraedru și punctele E, F, G, H, I, J pe laturile AB, BC, CA, CD, AD respectiv DB astfel ca

$$AE \cdot EB = BF \cdot FC = CG \cdot GA = CH \cdot HD = DI \cdot IA = DJ \cdot JB.$$

Arătați că punctele E, F, G, H, I, J se află pe o sferă.