SOLUŢIE

1. Demonstraţi că

$$\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{4}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n+2}{n\cdot(n+1)}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<2,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geqslant 2$.

Soluţie. Observăm că $\dfrac{k+2}{k\cdot(k+1)}=\dfrac{2(k+1)-k}{k\cdot(k+1)}=\dfrac{2}{k}-\dfrac{1}{k+1}$. Astfel inegalitatea de demonstrat se scrie succesiv

$$\frac{2}{1}-\frac{1}{2}+\frac{2}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}\right)<2,$$

$$2-\frac{1}{n+1}<2,$$

evident adevărat în condiţiile problemei.

SOLUȚIE

2. Determinaţi numerele naturale x şi y ştiind că numărul $\sqrt{3^x+2^y}$ este natural.

Popescu Luminiţa, Craiova

Soluţie. $\sqrt{3^x+2^y}$ este natural dacă şi numai dacă $3^x+2^y=k^2, k\in\mathbb{N}$.

Dacă $y=0$ avem $3^x=(k-1)\cdot(k+1)$ de unde $k-1=3^a, k+1=3^b, a+b=x$ şi $a,b\in\mathbb{N}$. Atunci $3^a-3^b=2$, deci $a=1, b=0, x=1$.

Dacă $y=1$ atunci $3^x+2=k^2$. Dacă $x>0$ avem $k^2 \equiv 2(mod\ 3)$ ceea ce este fals. Dacă $x=0$ se obţine $k^2=3$, fals.

Dacă $y\geqslant 2$ atunci k este impar şi $3^x\equiv 1(mod\ 4)$ deci $x=2u,\ u\in\mathbb{N}$. De aici $2^y=(k-3^u)(k+3^u)$. Deoarece $k+3^u$ şi $k-3^u$ sunt numere pare se obţine $k-3^u=2^a,\ k+3^u=2^b, b>a>0, a+b=y$, de unde $2^a\left(2^{b-a}-1\right)=2\cdot 3^u$, deci $a=1$ şi $2^{b-1}-1=3^u$. Dacă $u=0$ atunci $b-1=1$ şi $x=0, y=3$. Dacă $u>0$ atunci $2^{b-1}\equiv 1\ (mod\ 3)$ deci $b-1=2v, v\in\mathbb{N}$, iar $(2^v-1)(2^v+1)=3^u$. Există $m,n\in\mathbb{N}$ cu proprietatea $3^m=2^v-1, 3^n=2^v+1, m+n=u$, deci $3^n-3^m=2$ de unde $m=0$ şi $n=1$. Deci $x=2$, iar $v=1$, $b=3$ şi $y=4$.

Soluţiile problemei sunt $x=0, y=3; x=1, y=0$ şi $x=2, y=4$.

SOLUŢIE

3. Fie $ABCD$ un patrulater convex aşa încât prelungirile laturilor opuse AB şi CD se intersectează în E, iar prelungirile laturilor AD şi BC se intersectează în F. Se prelungesc segmentele AE, DE, BF, respectiv AF cu segmentele $EH = AB$, $EK = CD$, $FL = BC$, respectiv $FM = DA$. Arătaţi că punctele H, K, L şi M sunt vârfurile unui paralelogram.

Soluţie. Construim paralelogramul $ABOD$. Observăm că triunghiurile EHK şi DOC sunt congruente (L.U.L). Rezultă că $HK = CO$ şi $\sphericalangle HKE \equiv \sphericalangle DCO$ (alterne interne), ceea ce înseamnă că $HK \parallel CO$. Sunt congruente şi triunghiurile FLM şi BCO (L.U.L), de unde obţinem că $ML = CO$ şi $ML \parallel CO$. Atunci $ML = HK$ şi $ML \parallel HK$, deci $HKLM$ este paralelogram.

SOLUȚIE

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi. Se consideră punctul E astfel încât $AE = BD$, $DB \perp BE$, iar punctele A şi E sunt situate de o parte şi de alta a dreptei BD.

Arătaţi că, dacă $\sphericalangle(AE; BD) = 60^0$, atunci $ABCD$ este pătrat.

Adrian Bud, Negreşti-Oaş

Soluţie. Notăm $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAC = \alpha$ şi construim triunghiul echilateral ACP aşa încât punctele P şi B să fie de aceeaşi parte a dreptei AC. Notăm cu M punctul de intersecţie a dreptelor AE şi BD.

Atunci $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PAC - \sphericalangle BAC = 60° - \alpha$, iar $\sphericalangle MAB = \sphericalangle BME - \sphericalangle ABM = 60° - \alpha$. Rezultă că $\sphericalangle PAB = \sphericalangle MAB$ şi, cum $AP = AE$ şi $AB = AB$, triunghiurile PAB şi BAE sunt congruente (L.U.L.). Deducem că $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABE = 90° + \alpha$, prin urmare $\sphericalangle APB = 30°$ şi $\sphericalangle CPB = 60° - 30° = 30°$.

Observăm că $\sphericalangle CPB = \sphericalangle APB, PA = PC, PB = PB$, de unde deducem că triunghiurile CPB şi APB sunt congruente (L.U.L.), deci $AB = BC$, prin urmare $ABCD$ este pătrat.