SOLUȚIE

1. Fie numerele reale pozitive a, b, c cu proprietatea că $a+b+c=16$. Arătaţi că

$$\sqrt{a \cdot b + a \cdot c} + \sqrt{b \cdot c + b \cdot a} + \sqrt{c \cdot a + c \cdot b} \leqslant 24.$$

Soluţie: Folosind inegalitatea dintre media geometrică şi media aritmetică a două numere reale pozitive obţinem inegalitatea $\sqrt{a \cdot b + a \cdot c} = \sqrt{a \cdot (b+c)} \leqslant \dfrac{a+(b+c)}{2} = 8$ şi analoagele, care, prin sumare, conduc la inegalitatea de demonstrat.

SOLUȚIE

2. Fie $ABCD$ un paralelogram, punctul M simetricul punctului B faţă de punctul D, iar N un punct situat pe dreapta BC astfel încât $B \in (CN)$ şi $BN = 2 \cdot BC$. Demonstraţi că punctele M, A, N sunt coliniare.

Soluţie: Fie punctul P mijlocul segmentului BN. Deducem că segmentele AD şi NP sunt paralele şi egale, rezultă că patrulaterul $ADPN$ este paralelogram, prin urmare dreptele AN şi DP sunt paralele (1).

DP este linie mijlocie în triunghiul BMN, paralelă cu latura MN (2).

Din relaţiile (1) şi (2), ţinând cont de axioma paralelelor, deducem că punctele M, A, şi N sunt coliniare.

SOLUŢIE

3. În interiorul unui triunghi ABC considerăm punctul T care are proprietatea că $\sphericalangle BTC = \sphericalangle CTA = \sphericalangle ATB$. Arătaţi că

$$2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA > 4 \cdot AT + 3 \cdot BT + 2 \cdot CT.$$

Soluţie: Fie punctul D mijlocul segmentului TB şi punctul E situat pe dreapta AT, T între A şi E, astfel încât $TD = TE$. Atunci $\sphericalangle TED = \sphericalangle TDE = 60°$, de unde triunghiul TED este echilateral şi $DB = DT = DE$, de unde deducem că triunghiul TEB este dreptunghic în E. Prin urmare şi triunghiul AEB este dreptunghic în E, astfel că

$$AB > AE = AT + TE = AT + TB = AT + \frac{1}{2}BT.$$

În mod similar obţinem inegalităţile $AC > AT + \dfrac{1}{2}CT$ şi $BC > BT + \dfrac{1}{2}CT$. Adunând, apoi înmulţind inegalitatea obţinută cu 2 rezultă că

$$2 \cdot AB + 2 \cdot BC + 2 \cdot CA > 4 \cdot AT + 3 \cdot BT + 2 \cdot CT.$$

Observaţie: Punctul T cu proprietatea din enunţ se numeşte *punctul Torricelli-Fermat* al triunghiului ABC.

SOLUŢIE

4. Determinaţi perechile de numere întregi (x, y), $x \neq -y$, ştiind că numărul $\dfrac{x^2 \cdot y}{x+y}$ este egal cu puterea unui număr prim.

Soluţie: Dacă $d = (x, y)$ atunci $x = d \cdot a,\ y = d \cdot b$, iar $(a, b) = 1$.

Egalitatea $x^2 y = p^k (x + y)$ devine $d^2 \cdot a^2 \cdot b = p^k (a + b)$ (1) deci $a|p^k, b|p^k$. Deoarece numerele a,b sunt prime între ele iar p este număr prim avem două cazuri: $a = 1, b = p^i$ sau $a = p^i, b = 1$.

Dacă $a = 1, b = p^i$ egalitatea (1) devine $d^2 = p^{k-i} (1 + p^i)$. Deoarece $(1 + p^i, p^{k-i}) = 1$ avem $k - i = 2m$ şi $1 + p^i = u^2$ de unde $p^i = (u + 1)(u - 1)$. Deoarece p este număr prim se obţine $u + 1 = p^s$ şi $u - 1 = p^t$ de unde $2 = p^s - p^t$.

Dacă $t \neq 0$ atunci $2 = p^t (p^{s-t} - 1)$ deci $p = 2$, $t = 1$, $s = 2$, iar $i = 3$ de unde $u = 3$, $d = 3 \cdot 2^m$, deci $(x, y) = (3 \cdot 2^m, 3 \cdot 2^{m+3}), m \in \mathbb{N}$.

Dacă $t = 0$ atunci $2 = p^s - 1$ deci $p = 3$, $s = 1$, iar $i = 1$ de unde $u = 2$, $d = 2 \cdot 3^m$, deci $(x, y) = (2 \cdot 3^m, 2 \cdot 3^{m+1}), m \in \mathbb{N}$.

Dacă $a = p^i, b = 1$ egalitatea (1) devine $d^2 = p^{k-2i} (p^i + 1)$. Deoarece $(1 + p^i, p^{k-2i}) = 1$ avem $k - 2i = 2m$ şi $1 + p^i = u^2$ de unde $p^i = (u + 1)(u - 1)$. Deoarece p este număr prim se obţine $u + 1 = p^s$ şi $u - 1 = p^t$ de unde $2 = p^s - p^t$.

Dacă $t \neq 0$ atunci $2 = p^t (p^{s-t} - 1)$ deci $p = 2$, $t = 1$, $s = 2$, iar $i = 3$ de unde $u = 3$, $d = 3 \cdot 2^m$, deci $(x, y) = (3 \cdot 2^{m+3}, 3 \cdot 2^m), m \in \mathbb{N}$.

Dacă $t = 0$ atunci $2 = p^s - 1$ deci $p = 3$,$s = 1$, iar $i = 1$ de unde $u = 2$, $d = 2 \cdot 3^m$, deci $(x, y) = (2 \cdot 3^{m+1},\ \ 2 \cdot 3^m), m \in \mathbb{N}$.