Problema 1. Arătaţi că dacă $a, b, c, d, e \in (0, \infty)$, atunci

$$\frac{a}{b+2c+3d+4e}+\frac{b}{c+2d+3e+4a}+\frac{c}{d+2e+3a+4b}+$$
$$+\frac{d}{e+2a+3b+4c}+\frac{e}{a+2b+3c+4d}\geq\frac{1}{2}.$$

* * *

Soluţie:
Avem, folosind inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz,

$$\sum_{cicl}\frac{a}{b+2c+3d+4e}=\sum_{cicl}\frac{a^2}{ab+2ac+3ad+4ae}\overset{CBS}{\geq}$$

$$\frac{(a+b+c+d+e)^2}{5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)}\geq\frac{1}{2},$$

ultima inegalitate fiind echivalentă cu

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+4(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\geq$$
$$5(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de),$$

deci cu

$$4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-2(ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de)\geq 0,$$

care se mai scrie $(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(b-e)^2+(c-d)^2+(c-e)^2+(d-e)^2\geq 0$ şi care este evidentă.
Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c=d=e$.

Problema 2. Dacă a, b, c, d, e sunt numere naturale cu proprietatea că

$$a+b+c+d+e=abcde,$$

care este cea mai mare valoare posibilă a lui $\max\{a, b, c, d, e\}$?

* * *

Soluţia 1:
Relaţia fiind simetrică, putem presupune $a\leq b\leq c\leq d\leq e$, caz în care căutăm cea mai mare valoare posibilă a lui e. Avem $e<a+b+c+d+e\leq 5e$ (cu excepţia cazului $a=b=c=d=e=0$), adică $e<abcde\leq 5e$. Rezultă că $1\leq abcd\leq 5$.
Obţinem cazurile
$(a, b, c, d)\in\{(1,1,1,1), (1,1,1,2), (1,1,1,3), (1,1,1,4), (1,1,2,2), (1,1,1,5)\}$.
Revenind la condiţia $abcde=a+b+c+d+e$, obţinem $e\in\{5,\ 3,\ 2\}$.
Aşadar, valoarea maximă a lui e este 3 (se obţine atunci când numerele sunt 1, 1,

1, 2 şi 5).

Soluţia 2:
Dacă unul din numere este 0, toate sunt 0. Să vedem ce se întâmplă dacă numerele sunt nenule.
Relaţia fiind simetrică, putem presupune $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Să observăm că:
$1 = \frac{1}{bcde} + \frac{1}{acde} + \frac{1}{abde} + \frac{1}{abce} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{1}{de} + \frac{1}{de} + \frac{1}{de} + \frac{1}{de} + \frac{1}{e} + \frac{1}{d} = \frac{3+d+e}{de}$,
deci $de \leq d+e+3$, adică $(d-1)(e-1) \leq 4$. Dacă $d = 1$ atunci trebuie ca $a = b = c = 1$ (căci $0 < a \leq b \leq c \leq d = 1$), apoi, din $abcde = a+b+c+d+e$ rezultă o contradicţie. Deducem că $d - 1 \geq 1$, deci $e - 1 \leq \frac{4}{d-1} \leq 4$, adică $e \leq 5$.
Cum, pe de altă parte, numerele $a = b = c = 1$, $d = 2$, $e = 5$ satisfac enunţul, valoarea 5 chiar se poate atinge, deci este maximul căutat.

Remarcă:
Soluţia a doua poate fi adaptată uşor pentru a demonstra următoarea generalizare a problemei de mai sus:

Dacă $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere naturale cu proprietatea că suma lor este egală cu produsul lor, atunci cea mai mare valoare posibilă a lui $\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ este n şi se atinge atunci când unul din numere este egal cu n, altul cu 2, iar celelalte cu 1.

BIBLIOGRAFIE:

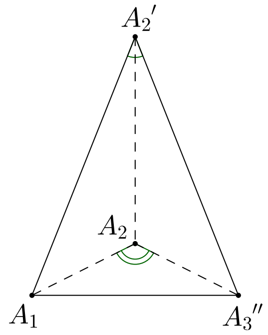
Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu – *An Introduction to Diophantine Equations*, A Problem-Based Approach, Birkhäuser, 2010

Problema 3. Prisma dreaptă $A_1A_2 \ldots A_nA_1'A_2' \ldots A_n'$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, are ca bază un poligon convex. Ştiind că $A_1A_2' \perp A_2A_3'$, $A_2A_3' \perp A_3A_4'$, $\ldots$, $A_{n-1}A_n' \perp A_nA_1'$, $A_nA_1' \perp A_1A_2'$, demonstraţi că:
a) $n = 3$;
b) prisma este regulată.

Mircea Fianu, Olimpiada Naţională de Matematică, 2002

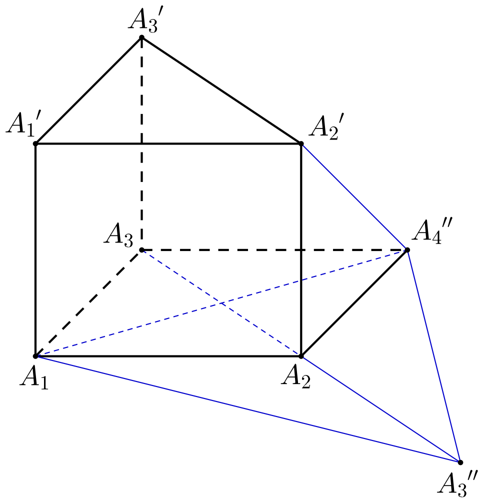
Soluţia oficială:
a) Fie A_3'' simetricul lui A_3 faţă de A_2. Atunci $A_2A_3''A_2'A_3'$ este paralelogram, deci

$A_2'A_3'' \parallel A_2A_3'$, de unde deducem că $m(\sphericalangle A_1A_2'A_3'') = 90°$.



Deoarece A_2 este proiecţia lui A_2' pe planul $(A_1A_2A_3'')$ şi $m(\sphericalangle A_1A_2'A_3'') = 90°$, măsura unghiului $\sphericalangle A_1A_2A_3''$ este mai mare de $90°$, deci $m(\sphericalangle A_1A_2A_3) < 90°$. Analog se arată că toate unghiurile poligonului $A_1A_2 \ldots A_n$ sunt ascuţite. Cum un poligon convex cu mai mult de trei laturi are cel puţin un unghi cu măsura $\geq 90°$ (suma măsurilor unghiurilor interioare ale unui poligon convex cu n laturi este $180°(n-2)$), deducem că $n = 3$.

b) „Mutăm" unghiurile drepte în A_2' construind în planul (ABC) punctele: A_3'' - simetricul lui A_3 faţă de A_2 şi A_4'' astfel încât $[A_2A_4'']$ să fie paralel şi congruent cu $[A_1A_3]$.
Atunci $A_2'A_1A_3''A_4''$ este triedru tridreptunghic cu vârful în A_2', deci A_2, proiecţia lui A_2' pe planul $(A_1A_3''A_4'')$, este ortocentrul triunghiului $A_1A_3''A_4''$. În plus, $A_3''A_2$ este şi mediană în triunghiul $A_1A_3''A_4''$ ($A_1A_2A_4''A_3$ este paralelogram), de unde rezultă imediat că $A_2A_1 = A_2A_4'' = A_2A_3''$, deci triunghiul $A_1A_2A_3$ este echilateral.



Problema 4. Un cub $6 \times 6 \times 6$ este construit din cubuleţe $1 \times 1 \times 1$. Unele cubuleţe sunt complet roşii, celelalte sunt complet albastre. Se ştie că orice parte $2 \times 2 \times 2$ a cubului este construită din 3 cubuleţe roşii şi 5 cubuleţe albastre. Demonstraţi că şi cubul mare are tot 3 vârfuri roşii şi 5 vârfuri albastre.

Concursul KöMaL, Ungaria, problema B. 4253.

Soluţie: (adaptare după soluţia din KöMaL)
Să aşezăm cubul pe una din feţele sale. Vom spune că un cubuleţ se află la „etajul

k" ($k \in \{1, 2, \ldots, 6\}$) dacă sub el se află $k - 1$ cubuleţe. Ne uităm acum la cele 24 de cubuleţe care constituie fiecare prismă care are baza un pătrat 2×2. Pe de o parte, fiecare asemenea prismă se descompune în câte trei cuburi $2 \times 2 \times 2$ disjuncte, deci conţine exact 9 cubuleţe roşii şi 15 albastre. Pe de altă parte, în această prismă se află 5 cuburi $2 \times 2 \times 2$. Uitându-ne pe rând la aceste 5 cuburi deducem că:
dacă la etajul 1 al unei asemenea prisme se află k cubuleţe roşii, la etajul 2 sunt $3 - k$ roşii, la etajul 3 iarăşi k roşii, la etajul 4 sunt $3 - k$ cubuleţe roşii, la etajul 5 sunt k, iar la etajul 6 sunt $3 - k$.

Să desprindem acum din cubul mare cele 36 de cubuleţe care contribuie la faţa de jos a cubului (tot etajul 1) şi să mutăm această prismă $6 \times 6 \times 1$, în aceeaşi poziţie, deasupra restului cubului. (Mutăm „etajul 1" al cubului deasupra „etajului 6".) Ne uităm la aceleaşi prisme $2 \times 2 \times 6$. În ansamblul lor, cubuleţele ce alcătuiesc fiecare asemenea prismă nu s-au modificat, prin urmare avem în continuare câte 9 cubuleţe roşii şi 15 albastre în fiecare asemenea prismă. Ne uităm acum la cele 5 cuburi $2 \times 2 \times 2$ care se află în fiecare asemenea prismă. Pentru fiecare dintre ele a rămas adevărat că dacă la un etaj al ei sunt k cubuleţe roşii, atunci la celălalt sunt $3 - k$, deci fiecare cub $2 \times 2 \times 2$ conţine exact 3 cubuleţe roşii.
Astfel, cubul mare îşi păstrează proprietatea că orice cub $2 \times 2 \times 2$ conţine exact 3 cubuleţe roşii şi 5 albastre şi după ce mutăm cubuleţele de pe una din feţe, în aceeaşi poziţie, deasupra feţei opuse.
Repetăm această manevră şi cu alte două feţe, având orientări diferite: mutăm cubuleţele din planul din faţă în spatele planului din spate şi cubuleţele din planul din dreapta în stânga planului din stânga.
Acum cubuleţele aflate iniţial în colţurile cubului au ajuns să formeze un cub $2 \times 2 \times 2$ situat în colţul din stânga-sus-spate al cubului. Am văzut că orice asemenea cub conţine exact 3 cubuleţe roşii şi 5 albastre, deci exact 3 dintre vârfurile cubului iniţial erau roşii, celelalte albastre.