RMT 1/2012

OBJ.1. Numărul N se obţine scriind unul după altul, fără virgulă între ele, numerele 1, 2, 2^2, $2^3, \dots, 2^{2012}$: $N = 1248163264128\dots$. Arătaţi că $2^{2012} \mid N$.

Andrei Eckstein

Soluţie (dată de eleva Camelia Oprea): Avem $N = 2^0 \cdot 10^{a_0} + 2^1 \cdot 10^{a_1} + \dots + 2^{2011} \cdot 10^{a_{2011}} + 2^{2012}$, unde a_k reprezintă numărul total de cifre necesar scrierii numerelor $2^{k+1}, 2^{k+2}, \dots, 2^{2012}$ în baza 10. Deoarece fiecare din aceste numere se scrie cu cel puţin o cifră, avem $a_k \geqslant 2012 - k$. Rezultă atunci că fiecare din termenii $2^k \cdot 10^{a_k}$ ai sumei de mai sus este divizibil cu 2^{2012}, deci şi N, suma acestora, este divizibil cu 2^{2012}.

OBJ.2. Rezolvaţi în $\mathbb{N}$ ecuaţia $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(p + \frac{1}{p} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = 1$, unde p este un număr prim.

Ovidiu Buică

Soluţie: Ecuaţia se scrie $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - p\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{p}\right) = 0$. Dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - p = 0$, cum $x \geqslant 1,\ y \geqslant 1$, rezultă $p \leqslant 2$. Pentru $p = 2$ se obţine $x = y = 1$, iar pentru $p > 2$ nu avem soluţii. Dacă $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{p} = 0$, atunci $xy = p(x + y)$ adică $(x - p)(y - p) = p^2$. Cum $x > p,\ y > p$, obţinem variantele: $x - p = 1,\ y - p = p^2$; $x - p = p,\ y - p = p$ şi $x - p = p^2,\ y - p = 1$. Obţinem soluţiile: $(x, y) \in \{(p+1,\ p^2+p),\ (2p, 2p),\ (p^2+p,\ p+1)\}$. În concluzie, pentru $p = 2$ avem soluţiile $(x, y) \in \{(1, 1),\ (3, 6),\ (4, 4),\ (6, 3)\}$, iar pentru $p > 2$, $(x, y) \in \{(p+1,\ p^2+p),\ (2p,\ 2p),\ (p^2+p,\ p+1)\}$.

OBJ.3. Numerele 1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, ... se numesc numere triunghiulare. Daţi exemplu de trei triplete de numere triunghiulare m, n, p astfel încât $m+n-p = 1002+1004+1006+\dots+1998$.

Augustin Devian

(în legătură cu problema **V.221.** din **RMT** nr. 2/2007)

Soluţie: Ne propunem să construim numerele triunghiulare:
$m = 1 + 2 + 3 + \dots + 500 + 501 + 502 + 503 + \dots + 999$
$n = 1 + 2 + 3 + \dots + 500 + 501 + 502 + 503 + \dots + 999 + 1000 + (1000 + 1) + \dots + (1000 + a)$
$p = 2(1 + 2 + 3 + \dots + 500) + 1000 + 1001 + \dots + (1000 + a)$.
Problema care se pune este dacă există un număr natural a astfel încât numărul p să fie triunghiular. Dacă există un asemenea număr, atunci $m + n - p = 1002 + 1004 + \dots + 1998$. Căutăm un număr triunghiular egal cu $2(1 + 2 + 3 + \dots + 500) + 1000 + 1001 + \dots + (1000 + a) = 250500 + \frac{(1000 + (1000 + a)) \cdot (a + 1)}{2}$, adică vrem să găsim un număr natural b astfel încât $\frac{b(b + 1)}{2} = 250500 + \frac{(1000 + (1000 + a)) \cdot (a + 1)}{2}$. Obţinem pe rând:
$b^2 + b = a^2 + 2001a + 503000,\ 4b^2 + 4b = 4a^2 + 4 \cdot 2001a + 2012000;\ (2b + 1)^2 = (2a + 2001)^2 - 1992000 \Leftrightarrow (2a + 2001)^2 - (2b + 1)^2 = 1992000$ sau $(2a + 2b + 2002)(2a - 2b + 2000) = 1992000$ adică $(a - b + 1000)(a + b + 1001) = 498000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 83$.
Observăm că $a + b + 1001 > a - b + 1000$ şi că cei doi factori au parităţi diferite.
1) Pentru alegerea următoare:
$\begin{cases} a - b + 1000 = 3 \cdot 83 = 249 \\ a + b + 1001 = 2^4 \cdot 5^3 = 2000 \end{cases}$ obţinem: $a = 124$ şi $b = 875$, de unde:
$m = 1 + 2 + 3 + \dots + 999 = 499500$, $n = 1 + 2 + 3 + \dots + 999 + 1000 + \dots + 1124 = 532250$ şi $p = 500 \cdot 501 + (1000 + 1124) \cdot 125 : 2 = 383250$ este o soluţie.

2) Pentru $\begin{cases} a - b + 1000 = 5^3 = 125 \\ a + b + 1001 = 2^4 \cdot 3 \cdot 83 = 3984 \end{cases}$ obţinem: $a = 1054$ şi $b = 1929$; $m = 499500,\ n = 2110485,\ p = 1861485$.

3) Pentru $\begin{cases} a - b + 1000 = 2^4 \cdot 5 = 80 \\ a + b + 1001 = 3 \cdot 5^2 \cdot 83 = 6225 \end{cases}$ obţinem: $a = 2152$ şi $b = 3072$; $m = 499500,\ n = 2316628,\ p = 4720128$.

Evident, mai sunt şi alte soluţii, fie tot cu $m = 1 + ... + 999$ (aşa cum le-am căutat noi), fie cu alte valori ale lui m.

OBJ.4. Rezolvaţi în $\mathbb{Z}^3$ ecuaţia $3x^2 + 4y^2 = 5z^2$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Vom arăta că ecuaţia are numai soluţia $(0,0,0)$. Presupunem că ecuaţia ar avea şi alte soluţii. Observăm că dacă $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{Z}^3$ este o soluţie a ecuaţiei, atunci şi $(|x_0|,\ |y_0|,\ |z_0|) \in \mathbb{N}^3$ este soluţie. Alegem $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ o soluţie pentru care $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ este minim. Atunci $3a^2 + 4b^2 = 5c^2$, sau $b^2 + c^2 = 3(2c^2 - b^2 - a^2)$. Din $3 \mid b^2 + c^2$ rezultă $3 \mid b,\ 3 \mid c$, apoi, din $3a^2 + 4b^2 = 5c^2$, rezultă $3 \mid a$. Obţinem că şi $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) \in \mathbb{N}^3$ e soluţie a ecuaţiei. Dar $\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{b}{3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ trebuie să fie $\geqslant a^2 + b^2 + c^2$ (din alegerea $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$), ceea ce nu se poate. Rezultă că $(0,0,0)$ este unica soluţie.

OBJ.5. Aflaţi $n \in \mathbb{N}^*$ şi numerele prime a, b, c, d dacă $a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} = d^{2^n} + 3$.

Cosmin Manea şi Dragoş Petrică

Soluţie: Cu $d = 2$ nu avem soluţie. Într-adevăr, $a \geqslant 2,\ b \geqslant 2,\ c \geqslant 2 \Rightarrow a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} \geqslant 2^{2^n} + 2^{2^n} + 2^{2^n} = 3 \cdot 2^{2^n} > 2^{2^n} + 3$ (pentru că $2 \cdot 2^{2^n} \geqslant 2 \cdot 2^2 = 8 > 3$). Rezultă că $d \geqslant 3$, d impar. Atunci $d^{2^n} + 3$ este par, prin urmare printre numerele $a^{2^n},\ b^{2^n}$ şi că c^{2^n} avem un număr par (sau toate 3 sunt pare). Dacă a, b, c sunt pare, fiind prime, rezultă $a = b = c = 2$ ecuaţia devine $3(2^{2^n} - 1) = d^{2^n}$ de unde $3 \mid d^{2^n}$, deci $d = 3$. Dacă $n \geqslant 2$ avem $\frac{3^{2^n}}{2^{2^n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2^n} \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > 3$ în vreme ce $\frac{3(2^{2^n} - 1)}{2^{2^n}} < 3$. Pentru $n = 1$ obţinem $3(2^2 - 1) = 3^2$, relaţie adevărată deci $a = b = c = 2,\ d = 3,\ n = 1$ este o soluţie a problemei. Dacă printre numerele $a,\ b,\ c$ exact unul este par, de exemplu a, atunci $a^{2^n} + b^{2^n} + c^{2^n} = M_4 + (M_4 + 1) + (M_4 + 1) = M_4 + 2$ în timp ce $d^{2^n} + 3 = (M_4 + 1) + 3 = M_4$. Prin urmare în acest caz nu avem soluţie. Rămâne că $(a, b, c, d, n) = (2, 2, 2, 3, 1)$ este singura soluţie.

OBJ.6. Se consideră un număr natural a şi mulţimea $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \sqrt{n^2 + an} \in \mathbb{N}\}$.
a) Arătaţi că A este finită dacă şi numai dacă $a \neq 0$.
b) Pentru $a \neq 0$ determinaţi maximul mulţimii A.

Nicolae Bourbăcuţ

Soluţie: **a)** Dacă $a = 0$ evident $A = \mathbb{N}$, deci A este infinită. Dacă $a \neq 0$ atunci dacă $a = 2k + 1$ atunci $(n + k)^2 < n^2 + (2k + 1)n < (n + k + 1)^2$ are loc pentru $n > k^2$. Deci numărul $n^2 + an$ nu mai poate fi pătrat perfect, adică $A \subset \{0, 1, ..., k^2\}$. Prin urmare A este finită. Dacă $a = 2k$ atunci $(n + k - 1)^2 < n^2 + 2kn < (n + k)^2$ are loc pentru orice $n > \frac{(k-1)^2}{2}$, deci de asemenea $n^2 + an$ nu poate fi pătrat perfect. Rezultă că $A \subset \left\{0, 1, ..., \left[\frac{(k-1)^2}{2}\right]\right\}$, deci A este finită.

b) Din calculele anterioare deducem că pentru cazul $a = 2k + 1$ maximul lui A se obţine când

$(n+k)^2 = n^2 + (2k+1)n$, adică $n = k^2$, adică $n = \dfrac{(a-1)^2}{4}$. Cazul a par trebuie analizat mai detaliat. Dacă $a = 4p+2$ avem $(n+2p)^2 < n^2 + (4p+2)n < (n+2p+1)^2$ pentru orice $n > 2p^2$, de unde egalitatea $(n+2p)^2 = n^2+(4p+2)n$ conduce la $n = 2p^2$, deci $n = \dfrac{(a-2)^2}{8}$. Dacă $a = 4p$ are loc inegalitatea $(n+2p-2)^2 < n^2+4pn < (n+2p)^2$ pentru orice $n > (p-1)^2$. Egalitatea $(n+2p-1)^2 = n^2+4pn$ nu este posibilă deoarece conduce la $2n = (2p-1)^2$. În aceste condiţii maximul mulţimii A îl găsim din egalitatea $(n+2p-2)^2 = n^2+4pn$, deci $n = (p-1)^2$, adică $n = \dfrac{(a-4)^2}{16}$.

OBJ.7. Fie $\mathscr{C}(O,R)$ cercul circumscris triunghiului ABC, iar $\mathscr{C}(I_a, r_a)$ cercul exînscris asociat laturii $[BC]$. Dacă D, E sunt respectiv punctele de contact ale cercului $\mathscr{C}(I_a, r_a)$ cu semidreptele $(AB$, $(AC$, iar $\{M\} = DE \cap BI_a$, $\{N\} = DE \cap CI_a$, $\{J\} = BN \cap CM$, ce condiţie trebuie să îndeplinească triunghiul ABC pentru ca $J \in \mathscr{C}(O,R)$?

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Întrucât $AD = AE$, AI_a este mediatoarea segmentului $[DE]$, deci $m(\sphericalangle ADE) = m(\sphericalangle AED) = 90° - \dfrac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle A)$. Din $\triangle BI_aC$, $m(\sphericalangle BI_aC) = 180° - \dfrac{180° - m(\sphericalangle B)}{2} - \dfrac{180° - m(\sphericalangle C)}{2} = \dfrac{m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)}{2} = 90° - \dfrac{1}{2}\, m(\sphericalangle A)$.

Atunci patrulaterele BDI_aN şi CEI_aM sunt inscriptibile. Cum $m(\sphericalangle BDI_a) = m(\sphericalangle CEI_a) = 90°$ rezultă $m(\sphericalangle BNI_a) = m(\sphericalangle CMI_a) = 90°$, deci J este ortocentrul $\triangle BCI_a$. Un calcul simplu arată că $m(\sphericalangle BJC) = 90° + \dfrac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle A)$, deci $J \in \mathcal{C}(O,R)$ dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle BAC) + m(\sphericalangle BJC) = 180°$ adică $m(\sphericalangle A) + 90° + \dfrac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle A) = 180°$, de unde $m(\sphericalangle A) = 60°$.

OBJ.8. Fie ABC un triunghi isoscel cu vârful în A, $m(\sphericalangle A) \neq 90°$, C' un punct arbitrar al laturii $[AB]$, iar B' acel punct al prelungirii laturii $[AC]$, dincolo de vârful C, pentru care avem $BC' = CB'$. Notăm cu H ortocentrul triunghiului ABC şi cu H' ortocentrul triunghiului $AB'C'$. Arătaţi că $HH' \parallel BC$.

Mihai Miculiţa

Soluţie: Vom trata numai cazul $m(\sphericalangle A) < 90°$, cazul $m(\sphericalangle A) > 90°$ fiind foarte similar. Notăm cu H_x, $x \in \{a,b,c\}$ picioarele înălţimilor triunghiului ABC şi cu H'_x, $x \in \{a,b,c\}$ picioarele înălţimilor triunghiului $AB'C'$, iar cu $\{B''\} = CH \cap C'H'$, $\{C''\} = BH \cap B'H'$. Întrucât BH_b, $C'H'_c \perp AC \Rightarrow BH_b \parallel C'H'_c$ şi $B'H'_b$, $CH_c \perp AB \Rightarrow B'H'_b \parallel CH_c$, rezultă că $HB''H'C''$ - paralelogram (1). Segmentele $[H_bH'_c]$ şi $[H'_bH_c]$ sunt însă înălţimi în paralelogramul $HB''H'C''$ şi ţinând seama de faptul că $BC' = CB'$, avem $H_bH'_c = BC' \cdot \cos A = CB' \cdot \cos A = H_cH'_b$ (2). Aşa că, pe baza relaţiilor (1) şi (2), putem spune că paralelogramul $HB''H'C''$ este un romb. Atunci $\sphericalangle H'HB'' \equiv \sphericalangle H'HC''$, deci $2 \cdot m(\sphericalangle H'HB'') = 2 \cdot m(\sphericalangle B''HC'')$ (3). Pe de altă parte, unghiul $\sphericalangle B''HC''$ fiind un unghi exterior al triunghiului isoscel HBC, avem: $m(\sphericalangle B''HC'') = m(\sphericalangle HBC) + m(\sphericalangle HCB) = 2 \cdot m(\sphericalangle HBC)$ (4). În fine, din relaţiile (3) şi (4), urmează că $\sphericalangle H'HC'' \equiv \sphericalangle HBC$ (alterne interne) $\Rightarrow HH' \parallel BC$.

OBJ.9. Se dă rombul $ABCD$ de centru O. Notăm cu M mijlocul segmentului $[OB]$ şi cu N mijlocul laturii $[CD]$. Demonstraţi că dacă $m(\sphericalangle AMN) = 90°$ atunci $ABCD$ este pătrat.

Titu Zvonaru

(în legătură cu problema **O.VII.255.** din **RMT** nr. 2/2010)

Soluţie: Notăm $\alpha = OA = OC$, $\beta = OB = OD$, $a = AB$. Cu formula care dă lungimea medianei într-un triunghi, avem: $AM^2 = \dfrac{AB^2 + AO^2}{2} - \dfrac{OB^2}{4} = \dfrac{2a^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4}$, $AN^2 = \dfrac{AC^2 + AD^2}{2} -$

$\dfrac{DC^2}{4} = \dfrac{4\alpha^2 + a^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{8\alpha^2 + a^2}{4}$. În triunghiul DMC avem $DM = \dfrac{3\beta}{2}$, $CM = AM$ şi cum MN este mediană, obţinem: $MN^2 = \dfrac{MC^2 + MD^2}{2} - \dfrac{DC^2}{4} = \dfrac{\dfrac{2a^2 + 2\alpha^2 - \beta^2}{4} + \dfrac{9\beta^2}{4}}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{\alpha^2 + 4\beta^2}{4}$. Cu teorema lui Pitagora, condiţia $m(\sphericalangle AMN) = 90^\circ$ se scrie succesiv: $AM^2 + MN^2 = AN^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2\alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2 + 4\beta^2 = 8\alpha^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 = 5\alpha^2 - 3\beta^2$ şi cum $a^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (căci $ABCD$ e romb şi are diagonalele perpendiculare) rezultă $\alpha^2 + \beta^2 = 5\alpha^2 - 3\beta^2$ ceea ce revine la $\alpha^2 = \beta^2$, adică $ABCD$ este pătrat.

RMT 3/2012

OBJ.10. Determinaţi toate perechile (m, n) de numere naturale nenule pentru care dreptunghiul $m \times n$ poate fi pavat folosind un număr egal de pătrate 2×2 şi 1×1.

Andrei Eckstein

Soluţie: Fie k numărul de dale 1×1 (şi 2×2) folosite la pavare. Din motive de arie, trebuie ca $mn = k + 4k$ adică $5 \mid mn$. Să presupunem că $5 \mid m$.
Vom arăta că putem pava dreptunghiuri $5k \times 2\ell$, $k, \ell \in \mathbb{N}^*$ şi $5k \times (2\ell + 1)$, $\forall k, \ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geqslant 3$, $k \geqslant 2$.
Pentru dreptunghiuri $5k \times 2\ell$ e suficient să observăm că putem pava un dreptunghi 5×2 cu două dale 2×2 şi două dale 1×1, apoi să pavăm orice dreptunghi $5k \times 2\ell$ cu astfel de dreptunghiuri.
Dreptunghiurile $5k \times (2\ell + 1)$ cu $k = 2k'$ le putem pava astfel: putem pava $10k' \times 5$ cu dreptunghiuri 2×5 şi $10k' \times 2\ell$ cu dreptunghiuri 5×2. Prin alăturare putem pava $10k' \times (2\ell + 5)$.
Pentru dreptunghiurile $5k \times (2\ell + 1)$ cu $k = 2k' + 1$: putem pava dreptunghiul 15×7 cu 21 de dale 2×2 dispuse pe 3 linii (astfel încât să acopere un dreptunghi 14×6), celelalte 21 de pătrăţele urmând a fi acoperite cu dale 1×1. Dispunem aşadar de dreptunghiul pavat 15×7, de dreptunghiul $15 \times 2\ell$, deci de dreptunghiul $15 \times (2\ell + 7)$. Cum avem şi $10k' \times (2\ell + 7)$, avem $(10k' + 15) \times (2\ell + 7)$.
Rămân de studiat cazurile: $5k \times 1$ (evident nu se poate pava pentru că nu putem pune nicio dală 2×2), $5k \times 3$ şi $5k \times 5$.
Pentru $5k \times 3$: putem plasa cel mult $5\left[\dfrac{k}{2}\right]$ dale 2×2. Ar trebui $3k$ dale 2×2, dar $5\left[\dfrac{k}{2}\right] \leqslant \dfrac{5}{2}k < 3k$.
Pentru $5k \times 5$: pentru k - par am văzut că putem pava $(5 \times 10k')$.
Pentru $k = 2k' + 1$, colorăm pătratele dreptunghiului cu patru culori astfel: coloanele impare, alternativ cu alb şi negru (începând mereu cu alb), coloanele pare alternativ cu roşu şi verde, (începând mereu cu roşu).
Vom avea $(5k' + 3) \cdot 3$ pătrate albe, $(5k' + 2) \cdot 3$ pătrate negre, $(5k' + 3) \cdot 2$ pătrate roşii, $(5k' + 2) \cdot 2$ pătrate verzi. Fiecare dală 2×2 acoperă exact un pătrat din fiecare culoare. Deoarece avem doar $10k' + 4$ pătrate verzi, vom putea pune cel mult $10k' + 4$ dale 2×2. Dar noi am avea nevoie de $\dfrac{mn}{5} = 10k' + 5$ dale 2×2, aşadar dreptunghiurile $(10k' + 5) \times 5$ nu se pot pava.

OBJ.11. Fie $A = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111...11}_{18n+9 \text{ cifre}}$. Efectuând adunările, arătaţi că cifra a din mijloc a rezultatului nu depinde de n.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: E uşor de văzut că pentru $n = 0$ cifra din mijloc este 5. Avem $A = \dfrac{10 - 1}{9} + \dfrac{10^2 - 1}{9} + ... + \dfrac{10^{18n+9} - 1}{9} = \dfrac{1}{9}\left(10 + 10^2 + ... + 10^{18n+9} - 18n - 9\right) = \dfrac{111...110 - 18n - 9}{9} = B - 2n - 1$, unde B este un număr cu $18n + 9$ cifre de forma 123456790123456790...123456790 ($2n + 1$ grupuri de

123456790). Cifra din mijloc a lui B este cifra din mijloc a grupului 123456790 din mijloc (al $n+1$-lea) adică 5. Deoarece $10^{9n} > 2n+1$, cifra din mijloc a lui A va coincide cu cifra din mijloc a lui B.

OBJ.12. Demonstraţi că pentru orice $x, y, z > 0$ are loc inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 + xyz + 4 \geqslant 2(xy + yz + zx)$.

George Mihai

Soluţie: Putem aplica metoda prezentată în articolul „O metodă de a demonstra inegalităţi" de Marian Tetiva şi Mircea Lascu din numărul 2/2012 (vezi în special inegalitatea 7, a lui Darij Grinberg, dintre exerciţiile lăsate temă acolo). Observăm că avem egalitate pentru $x = y = z = 2$. Cel puţin două dintre numerele x, y, z sunt $\geqslant 2$ sau $\leqslant 2$ (din principiul cutiei!). Fie acestea x şi y. Atunci $(x - 2)(y - 2) \geqslant 0$, deci $z(x - 2)(y - 2) \geqslant 0$ adică $xyz + 4z \geqslant 2xz + 2yz$.
De asemenea, $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$ şi $z^2 + 4 \geqslant 4z$. Adunând ultimele trei inegalităţi o obţinem pe cea din enunţ, cu egalitate dacă $x = y = z = 2$.

OBJ.13. Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, arătaţi că
$$\frac{x^2}{yz+1} + \frac{y^2}{zx+1} + \frac{z^2}{xy+1} \geqslant \frac{yz}{yz+1} + \frac{zx}{zx+1} + \frac{xy}{xy+1}.$$

Vasile Peiţa

Soluţia 1: Adunând $\frac{1}{yz+1} + \frac{1}{zx+1} + \frac{1}{xy+1}$ la ambii membri, inegalitatea se rescrie echivalent $\frac{x^2+1}{yz+1} + \frac{y^2+1}{xz+1} + \frac{z^2+1}{xy+1} \geqslant 3$. Eliminând numitorii ajungem la $(x^4yz + xy^4z + xyz^4) + (x^3y + x^3z + y^3z + y^3x + z^3x + z^3y + x^2yz + xy^2z + xyz^2) + (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx) + 3 \geqslant 3x^2y^2z^2 + 3(x^2yz + xy^2z + xyz^2) + 3(xy + yz + zx) + 3$ care rezultă din adunarea inegalităţilor $x^4yz + xy^4z + xyz^4 \geqslant 3x^2y^2z^2$ (inegalitatea mediilor), $\sum x^3y \geqslant 2\sum x^2yz$ (Muirhead sau direct scriind $x^3y + xyz^2 \geqslant 2x^2yz$ şi analoagele), $(x+y+z)^2 \geqslant 3(xy+yz+zx)$. Egalitatea are loc dacă $x = y = z$.

Soluţia 2: Notând $x + y + z = s$, avem $xy + yz + zx \leqslant \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{s^2}{3}$. Atunci avem $\frac{x^2}{yz+1} + \frac{y^2}{zx+1} + \frac{z^2}{xy+1} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx+3} \geqslant \frac{s^2}{\frac{s^2}{3}+3} = \frac{3s^2}{s^2+9}$ şi $\frac{xy}{xy+1} + \frac{yz}{yz+1} + \frac{zx}{zx+1} = 1 - \frac{1}{xy+1} + 1 - \frac{1}{yz+1} + 1 - \frac{1}{zx+1} = 3 - \left(\frac{1^2}{xy+1} + \frac{1^2}{yz+1} + \frac{1^2}{zx+1}\right) \leqslant 3 - \frac{9}{xy+yz+zx+3} \leqslant 3 - \frac{9}{\frac{s^2}{3}+3} = \frac{3s^2}{s^2+9}$ de unde concluzia.

OBJ.14. Fie $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ astfel încât $a + b + c + d + e = 0$ şi $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 4$. Arătaţi că $a + 2b + 3c + 4d + 5e \leqslant 2\sqrt{10}$.

Dumitru Barac

Soluţie: Avem $a+2b+3c+4d+5e = a+2b+3c+4d+5e-3(a+b+c+d+e) - \frac{\sqrt{10}}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-4) = -2a-b+d+2e - \frac{\sqrt{10}}{4}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+4) = -\frac{\sqrt{10}}{4}\left(a^2 + \frac{8}{\sqrt{10}}a\right) - \frac{\sqrt{10}}{4}\left(b^2 + \frac{4}{\sqrt{10}}b\right) - \frac{\sqrt{10}}{4}c^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}\left(d^2 - \frac{8}{\sqrt{10}}d\right) - \frac{\sqrt{10}}{4}\left(e^2 - \frac{8}{\sqrt{10}}e\right) + \sqrt{10} = -\frac{\sqrt{10}}{4}\left(a + \frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}\left(b + \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot c^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}\left(d - \frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{\sqrt{10}}{4}\left(e - \frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 + 2\sqrt{10} \leqslant 2\sqrt{10}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $-a = e = \dfrac{4}{\sqrt{10}}$, $-b = d = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ şi $c = 0$.

Observaţie: La concursul „Nicolae Păun" din decembrie 2001, problema a treia de la clasa a X-a, propusă de Cristinel Mortici, avea aceleaşi ipoteze, dar concluzia era $a + 2b + 3c + 4d + 5e < 7$, mai slabă decât cea din enunţul nostru.
A se vedea şi problema **IX.346.**

OBJ.15. Fie dreptunghiul $ABCD$ şi punctul $M \in (BD)$. Demonstraţi că
$MB \cdot MD \leqslant MA \cdot MC$ şi precizaţi când are loc egalitatea.

Claudiu-Ştefan Popa

Soluţia 1: Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului. Dacă $M = O$, relaţia din enunţ e evidentă (are loc egalitatea). Presupunem $M \in (OD)$. Cazul $M \in (OB)$ e analog. Fie M' simetricul lui M faţă de O. Avem $CM' = AM$. Relaţia de demonstrat se scrie succesiv: $(OB+OM)(OD-OM) \leqslant CM' \cdot CM \Leftrightarrow (OC+OM)(OC-OM) \leqslant CM' \cdot CM \Leftrightarrow OC^2 - OM^2 \leqslant CM' \cdot CM$. Cu teorema medianei în $\triangle CMM'$, avem mai departe $\dfrac{2CM'^2 + 2CM^2 - M'M^2}{4} - \dfrac{M'M^2}{4} \leqslant CM' \cdot CM \Leftrightarrow M'M^2 \geqslant (CM' - CM)^2$, evidentă din inegalitatea triunghiului.
Cum în ultima inegalitate nu putem avea egalitate (M', M, C necoliniare), rămâne că egalitatea are loc numai pentru $M = 0$.
Soluţia 2 (Dan Schwarz): Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor dreptunghiului. Dacă $M = O$ avem evident relaţia din enunţ.
Dacă $M \neq O$, de exemplu $M \in (OB)$, atunci considerăm punctul E intersecţia semidreptei $(AM$ cu cercul circumscris dreptunghiului. Din puterea punctului M, avem $MB \cdot MD = MA \cdot ME$. Vom arăta că $ME < MC$. Considerând cercul cu centrul în M şi de rază ME, acest cerc intersectează cercul circumscris dreptunghiului în E şi în simetricul acestuia faţă de OB. Prin urmare punctul C se află în exteriorul cercului cu centrul în M şi de rază ME, deci $ME < MC$. Prin urmare egalitate avem dacă şi numai dacă $M = O$.
Observaţie: Problema a fost dată la faza finală a concursului Gazeta Matematică şi Viitori-Olimpici, Câmpulung, 2012 (clasa a VII-a)

OBJ.16. Fie a, b, c cifre nenule ale sistemului zecimal. Comparaţi numerele
$\dfrac{a}{\overline{ab}} + \dfrac{b}{\overline{bc}} + \dfrac{c}{\overline{ca}}$ şi $\dfrac{b}{\overline{ab}} + \dfrac{c}{\overline{bc}} + \dfrac{a}{\overline{ca}}$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: În problema **O.VIII.296** din RMT nr. 4/2011 se afirmă că dacă a, b, c sunt cifre nenule atunci $\dfrac{\overline{ba}}{\overline{ab}} + \dfrac{\overline{cb}}{\overline{bc}} + \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ca}} \geqslant 3$.
Demonstraţie: $\dfrac{(\overline{ba})^2}{\overline{ab} \cdot \overline{ba}} + \dfrac{(\overline{cb})^2}{\overline{bc} \cdot \overline{cb}} + \dfrac{(\overline{ac})^2}{\overline{ca} \cdot \overline{ac}} \geqslant \dfrac{(\overline{ba} + \overline{cb} + \overline{ac})^2}{\overline{ab} \cdot \overline{ba} + \overline{bc} \cdot \overline{cb} + \overline{ca} \cdot \overline{ac}} = \dfrac{11^2(a+b+c)^2}{(10a+b)(10b+a)+(10b+c)(10c+b)+(10c+a)(10a+c)} = \dfrac{11^2(a+b+c)^2}{20(a^2+b^2+c^2)+101(ab+bc+ca)} \geqslant 3 \Leftrightarrow 121(a^2+b^2+c^2)+242(ab+bc+ca) \geqslant 60(a^2+b^2+c^2)+303(ab+bc+ca) \Leftrightarrow 61(a^2+b^2+c^2) \geqslant 61(ab+bc+ca)$ ceea ce este evident.
Folosind acest rezultat, avem că
$\dfrac{\overline{ba}}{\overline{ab}} - 1 + \dfrac{\overline{cb}}{\overline{bc}} - 1 + \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ca}} - 1 \geqslant 0$ adică $\dfrac{\overline{ba} - \overline{ab}}{\overline{ab}} + \dfrac{\overline{cb} - \overline{bc}}{\overline{bc}} + \dfrac{\overline{ac} - \overline{ca}}{\overline{ca}} \geqslant 0$ sau încă $\dfrac{9(b-a)}{\overline{ab}} + \dfrac{9(c-b)}{\overline{bc}} + \dfrac{9(a-c)}{\overline{ca}} \geqslant 0$ de unde $\dfrac{b}{\overline{ab}} + \dfrac{c}{\overline{bc}} + \dfrac{a}{\overline{ca}} \geqslant \dfrac{a}{\overline{ab}} + \dfrac{b}{\overline{bc}} + \dfrac{c}{\overline{ca}}$.

Soluţia 2: Putem presupune că $a \leqslant b \leqslant c$ sau $a \geqslant b \geqslant c$. Dacă $a \leqslant b \leqslant c$ atunci $\overline{ab} \leqslant \overline{bc} \leqslant \overline{ca}$ exceptând cazul în care $b = c$, când $\overline{ab} \leqslant \overline{ca} \leqslant \overline{bc}$. Dacă $b < c$ atunci din inegalitatea rearanjamentelor avem că $\frac{a}{\overline{ab}} + \frac{b}{\overline{bc}} + \frac{c}{\overline{ca}}$ e mai mică decât orice altă rearanjare, în particular decât $\frac{a}{\overline{ca}} + \frac{b}{\overline{ab}} + \frac{c}{\overline{bc}}$. Analog se tratează celelalte cazuri.

OBJ.17. a) Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este fixat, arătaţi că pentru orice partiţie a lui $\mathbb{N}^*$ în două submulţimi, există x şi y aparţinând aceleiaşi mulţimi a partiţiei astfel încât $x^2+y^2-2xy+3nx-3ny+2n^2 = 0$.
b) Arătaţi că există $m_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geqslant m_0$ afirmaţia de la **a)** nu mai este valabilă pentru o partiţie cu m mulţimi a lui $\mathbb{N}^*$.

Ovidiu Buică

Soluţie: **a)** $x^2 + y^2 - 2xy + 3nx - 3ny + 2n^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + 3n(x - y) + 2n^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y + n)(x - y + 2n) = 0$ $(*)$. Se observă că $(n, 2n)$, $(2n, 3n)$, $(n, 3n)$ verifică ecuaţia, iar două dintre numerele $n, 2n, 3n$ aparţin aceleiaşi mulţimi a partiţiei.
b) Considerăm $m_0 = 2n^2 + 1$ şi următoarea partiţie alui $\mathbb{N}^*$: $\{m_0k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$; $\{m_0k + 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}, ..., \{m_0k + m_0 - 1 \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Pentru orice x, y aparţinând unei aceeaşi mulţimi a partiţiei, din $(*)$, rezultă $2n^2 \equiv 0 \pmod{m_0}$, contradicţie. Raţionamentul e valabil pentru orice $m \geqslant m_0$. (pentru $n > 1$ se poate lua $m_0 = n + 1$).

RMT 4/2012

OBJ.18. Determinaţi numerele naturale a, b, $c \geq 2$, distincte, pentru care $32[a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)] = 9a^2b^2c^2$.

Florin Stănescu

Soluţie: Egalitatea din enunţ se scrie sub forma: $32[ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)] = 9a^2b^2c^2$, iar prin împărţire cu $a^2b^2c^2$, respectiv cu 32 obţinem: $\frac{ab(a + b)}{a^2b^2c^2} + \frac{bc(b + c)}{a^2b^2c^2} + \frac{ca(c + a)}{a^2b^2c^2} = \frac{9}{32}$, sau $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{b^2} = \frac{9}{32}$. Presupunem $a < b < c$, iar cum a, b, c sunt numere naturale distincte mai mari sau egale cu 2 rezultă $a \geqslant 2$, $b \geqslant 3$, $c \geqslant 4$, deci $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{3}$, $\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{4}$, (1). Ţinând cont de (1) avem $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\frac{1}{a^2} + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\frac{1}{b^2} \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{4^2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{3^2} = \frac{5}{2^5 \cdot 3} + \frac{7}{2^4 \cdot 3} + \frac{3}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{9}{32}$, egalitatea având loc dacă $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b} = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{c} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Astfel avem: $(a, b, c) \in \{(2, 3, 4);\ (2, 4, 3);\ (3, 2, 4);\ (3, 4, 2);\ (4, 2, 3);\ (4, 3, 2)\}$.

OBJ.19. Fie a, b, c trei numere naturale consecutive (nu neapărat în această ordine) şi numerele $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2}$ şi $y = \frac{b^3}{a^2 + b^2} + \frac{c^3}{b^2 + c^2} + \frac{a^3}{c^2 + a^2}$. Arătaţi că $\mid x - y \mid < 2$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Cum $x - y = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + a^2} = (a - b) \cdot \frac{a^2 + b^2 + ab}{a^2 + b^2} + (b - c) \cdot \frac{b^2 + c^2 + bc}{b^2 + c^2} + (c - a) \cdot \frac{c^2 + a^2 + ca}{c^2 + a^2} = (a - b) + (a - b) \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} + (b - c) + (b - c) \cdot \frac{bc}{b^2 + c^2} + (c - a) + (c - a) \cdot \frac{ca}{c^2 + a^2} = (a - b) \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} + (b - c) \cdot \frac{bc}{b^2 + c^2} + (c - a) \cdot \frac{ca}{c^2 + a^2}$, folosind faptul că $\frac{xy}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{2}$, $\forall x, y > 0$, obţinem că $|x - y| \leqslant |a - b| \cdot \frac{1}{2} + |b - c| \cdot \frac{1}{2} + |c - a| \cdot \frac{1}{2} = \frac{|a - b| + |b - c| + |c - a|}{2}$. Dacă luăm

a, b, c trei numere naturale nenule consecutive, atunci $|x-y| < \dfrac{1+1+2}{2} = 2$. Inegalitatea este strictă pentru că inegalităţile $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ sunt stricte atunci când x şi y sunt numere naturale diferite.

OBJ.20. Problema a apărut cu un enunţ incomplet. Varianta corectată este propusă din nou în cadrul aceleiaşi rubrici.

OBJ.21. Dacă x, y, z sunt numere reale cu proprietatea că $x+y \neq 0$, $y+z \neq 0$, $z+x \neq 0$ şi $\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = 2013$, calculaţi suma $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$.

Dan Nedeianu

Soluţie: Notăm $u = \dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$ şi $v = \dfrac{y}{x+y} + \dfrac{z}{y+z} + \dfrac{x}{z+x}$. Avem $u+v=3$ şi folosim identitatea $\dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{y-z}{y+z} + \dfrac{z-x}{z+x} = -\dfrac{x-y}{x+y} \cdot \dfrac{y-z}{y+z} \cdot \dfrac{z-x}{z+x}$. Va rezulta că $u-v=-2013$, de unde $u=-1005$.

OBJ.22. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. În câte moduri se poate pava o podea dreptunghiulară de dimensiune $2n \times (n+1)$ cu dale $n \times 1$?

Andrei Eckstein

Soluţie: Ne imaginăm podeaua ca pe un dreptunghi $2n \times (n+1)$ cu lungimea dispusă orizontal. Împărţim dreptunghiul în două bucăţi $n \times (n+1)$. Numărăm mai întâi pavările care se obţin pavând separat cele două jumătăţi (nicio dală nu este tăiată de „linia de demarcaţie" dintre cele două jumătaţi). Dreptunghiul $n \times (n+1)$ se poate pava în 3 moduri: $n+1$ dale dispuse vertical sau n dale verticale şi cea de-a $n+1$-a dală orizontal pe prima sau ultima linie. Aşadar sunt $3 \cdot 3 = 9$ pavări care nu taie linia de demarcaţie. Dacă linia de demarcaţie taie cu un dreptunghi d pus orizontal pe linia ℓ, celelalte $n-1$ pătrăţele de pe linia ℓ vor fi acoperite de dale verticale. Dala verticală d' plasată pe prima coloană de după cele ocupate de dreptunghiul d lasă liber fie pătrăţelul de pe prima linie, fie cel de pe ultima linie. Dacă vreuna din dalele verticale situate la dreapta lui d' n-ar lăsa liber pătrăţelul de pe aceeaşi linie ca şi d', respectivul pătrăţel n-ar mai putea fi acoperit. Aşadar, toate dalele verticale situate la dreapta lui d' acoperă aceleaşi n linii ca şi d'. Pătratele de pe linia lăsată liberă, prima sau ultima, va trebui să fie acoperite prin două dale orizontale; de aici pavarea este unică.

Aşadar, pentru fiecare dală plasată orizontal care taie linia de demarcaţie există 2 variante:

1. Prima linie pavată din două dale orizontale, deasupra şi dedesubtul lui d se pun dale orizontale, restul se completează cu dale verticale;
2. Similar, dar ultima linie se pavează cu două dale orizontale.

Numărătoarea: Grupul celor n dale orizontale poate fi tăiat de linia de demarcaţie după 1 pătrăţele, 2 pătrăţele, ... , n–1 pătrăţele ($n-1$ variante). În total sunt $9+2\cdot(n-1) = 2n+7$ pavări.

OBJ.23. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $71^n + 72^n + 73^n$ este cub perfect.

Marian Cucoaneş

Soluţie: Dacă n este par, $n = 2k$, $71^{2k} + 72^{2k} + 73^{2k} = (M_8 - 1)^{2k} + (M_8)^{2k} + (M_8+1)^{2k} = (M_8+1) + M_8 + (M_8+1) = M_8 + 2$ e divizibil cu 2 dar nu şi cu 2^3, deci nu este cub perfect. Pentru $n = 1$, $71^1 + 72^1 + 73^1 = 216 = 6^3$. Pentru n impar, $n \geqslant 3$, $71^n + 73^n = 144(71^{n-1} + 71^{n-2} \cdot 73 + ... + 73^{n-1}) = 144 \cdot \mathit{impar}$ este multiplu de 16 dar nu şi de 32. 72^n este multiplu de 32, deci $71^n + 72^n + 73^n$ este divizibil cu 2^4 dar nu şi cu 2^5, deci nu este cub perfect.

OBJ.24. Considerăm triunghiul echilateral ABC şi $D \in (AC)$ un punct oarecare. Notăm cu O, I, H centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris şi respectiv ortocentrul triunghiului BCD. Fie $AD \cap OI = \{U\}$, $DH \cap BO = \{V\}$ şi $HI \cap AM = \{W\}$. Demonstraţi că punctele U, V şi W sunt coliniare.

Petru Braica

Soluţie: Arătăm că hexagonul $ADHIOB$ este inscriptibil. Din teorema lui Pascal rezultă coliniaritatea punctelor U, V şi W.
Patrulaterul $ABOD$ este inscriptibil pentru că $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle OCA$ (diferenţă de unghiuri congruente) şi $\sphericalangle OCA \equiv \sphericalangle ODC$ implică $\sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle ODC$, deci $\sphericalangle OBA$ şi $\sphericalangle ADO$ sunt suplementare.
Patrulaterul $ABID$ este inscriptibil pentru că $\triangle IBC \equiv \triangle IAC$ $(L.U.L.)$ implică $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle IAC$ şi, cum $\sphericalangle IBC \equiv \sphericalangle IBD$, rezultă $\sphericalangle IAD \equiv \sphericalangle IBD$.
Patrulaterul $ABHD$ e inscriptibil pentru că $m(\sphericalangle BHD) = 180° - m(\sphericalangle ACB) = 180° - m(\sphericalangle BAC)$.
Atunci, cu teorema lui Pascal („Dacă A, B, C, D, E, F sunt conciclice, atunci intersecţiile $AB \cap DE$, $BC \cap EF$, $CD \cap FA$ sunt puncte coliniare.") problema este rezolvată.

OBJ.25. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi ascuţitunghic, atunci este adevărată inegalitatea $\dfrac{b+c}{b+c-a} + \dfrac{c+a}{c+a-b} + \dfrac{a+b}{a+b-c} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c}$.

Titu Zvonaru

Soluţia 1: Avem $\dfrac{b+c}{b+c-a} - \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{(b+c)(a-b-c+a)}{a(b+c-a)}$ adică $\dfrac{b+c}{b+c-a} - \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{(b+c)(a-b)}{a(b+c-a)} + \dfrac{(b+c)(a-c)}{a(b+c-a)}$ (1) şi analog

$$\frac{c+a}{c+a-b} - \frac{c+a}{b} = \frac{(c+a)(b-c)}{b(c+a-b)} + \frac{(c+a)(b-a)}{b(c+a-b)} \quad (2)$$

$$\frac{a+b}{a+b-c} - \frac{a+b}{c} = \frac{(a+b)(c-a)}{c(a+b-c)} + \frac{(a+b)(c-b)}{c(a+b-c)} \quad (3).$$

Grupând convenabil (în funcţie de numărători) obţinem

$$\frac{(b+c)(a-b)}{a(b+c-a)} + \frac{(c+a)(b-a)}{b(c+a-b)} =$$

$$\frac{(a-b)(b^2c+ab^2-b^3+bc^2+abc-b^2c-abc-ac^2+a^2c-a^2b-a^2c+a^3)}{ab(b+c-a)(c+a-b)} =$$

$$\frac{(a-b)(a^3-b^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2)}{ab(b+c-a)(c+a-b)} = \frac{(a-b)^2(a^2+ab+b^2-ab-c^2)}{ab(b+c-a)(c+a-b)} =$$

$$\frac{(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)}{ab(b+c-a)(c+a-b)} \geqslant 0$$ (deoarece triunghiul dat este ascuţitunghic).

Procedând similar cu încă două perechi de fracţii, din relaţiile (1), (2), (3), obţinem în final $\displaystyle\sum_{ciclic} \frac{b+c}{b+c-a} - \sum_{ciclic} \frac{b+c}{a} = \sum_{ciclic} \frac{(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)}{ab(b+c-a)(c+a-b)}$, identitate care demonstrează inegalitatea dorită.

Soluţia 2: Se ştie că a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi oarecare, dacă şi numai dacă există $x, y, z > 0$ astfel ca $a = x+y$, $b = y+z$, $c = z+x$. Cu aceste substituţii (numite *substituţiile lui Ravi*), inegalitatea din enunţ se scrie echivalent $\displaystyle\sum \frac{x+y+2z}{2z} \geqslant \sum \left(\frac{x+y}{x+z} + \frac{y+z}{x+z}\right)$ adică $\displaystyle\sum \left(\frac{x+y}{2z}+1\right) \geqslant \sum \left(\frac{2y}{x+z}+1\right)$ sau $\displaystyle\frac{1}{2}\sum \frac{x+y}{z} \geqslant 2\sum \frac{z}{x+y}$. Dar $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right) \geqslant \dfrac{2}{x+y}$ (revine la $(x-y)^2 \geqslant 0$), deci $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\right) \geqslant \dfrac{2z}{x+y}$. Scriind şi relaţiile analoage şi adunând rezultă inegalitatea dorită, deci inegalitatea din enunţ are loc pentru a, b, c laturile unui triunghi oarecare.

Egalitate avem dacă $x = y = z$, adică $a = b = c$ (pentru un triunghi echilateral).

RMT 1/2013

OBJ.20. (enunţ completat)[1] Fie $ABCD$ un paralelogram. O dreaptă fixă d, dusă prin D, intersectează AB, (BC), (AC) respectiv în M, N, O. Determinaţi locul geometric al punctelor de contact T_1, T_2 ale tangentelor duse din O la un cerc variabil care trece prin M şi N.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Fie $AB = CD = a,\ AD = BC = b$. Din $\triangle COD \sim \triangle AOM$ rezultă $\dfrac{OD}{OM} = \dfrac{a}{a + BM}$, iar din $\triangle CON \sim \triangle AOD$ şi $\triangle MNB \sim \triangle MDA$ că $\dfrac{ON}{OD} = \dfrac{b - BN}{b} = 1 - \dfrac{BN}{b} = 1 - \dfrac{BM}{a + BM} = \dfrac{a}{a + BM} = \dfrac{OD}{OM}$. Deducem că $OD^2 = OM \cdot ON = \rho(O)$ (puterea punctului O faţă de cercul variabil care trece prin M, N). Dar $\rho(O) = OT_1^2 = OT_2^2$, deci $OT_1 = OT_2 = OD$, adică $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(O, OD) \setminus d$. Reciproc, fie $T \in \mathcal{C}(O, OD) \setminus d$ şi Γ cercul circumscris triunghiului TMN. Cum $OT^2 = OD^2 = OM \cdot ON$, deci OT este tangentă cercului Γ. În concluzie locul geometric este $\mathcal{C}(O, OD) \setminus d$. Mai precis, atât T_1 cât şi T_2 descriu câte un semicerc din $\mathcal{C}(O, OD)$.

OBJ.26. O mulţime A este alcătuită din 5 numere naturale. Se ştie că mulţimea sumelor obţinute prin adunarea a câte două elemente distincte din A este alcătuită din 7 elemente. Arătaţi că suma elementelor din A este divizibilă cu 5.

Dan Nedeianu

Soluţie: Fie $a < b < c < d < e$ elementele lui A. Avem $a+b < a+c < b+c < b+d < c+d < c+e < d+e$ (adică 7 sume distincte). Totodată avem $a+b < a+c < a+d < a+e < b+e < c+e < d+e$ (adică tot 7 sume disctincte). Deducem că cele 7 sume coincid, deci $a + d = b + c$, $a + e = b + d$, $b + e = c + d$. Rescrise, aceste relaţii revin la $b - a = c - b = d - c = e - d \overset{\text{not}}{=} x$, de unde $b = a + x$, $c = a+2x$, $d = a+3x$, $e = a+4x$ şi $a+b+c+d+e = 5a+(1+2+3+4)x = 5(a+2x)$ este divizibil cu 5.

OBJ.27. Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea că $abc = \dfrac{1}{8}$. Demonstraţi că

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}}\right)\left(\sqrt{\frac{c}{a}} + \sqrt{\frac{a}{c}}\right) \geqslant \sqrt{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)}.$$

Mugurel Alex. Szőrös

Soluţie: Observăm că $\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} + 2 = (a + b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ şi analoagele, de unde $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \sqrt{a + b}\sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} \geqslant \sqrt{2\sqrt{ab}}\sqrt{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ şi analoagele. Înmulţind aceste 3 relaţii obţinem, folosind că $2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} = 8abc$, inegalitatea din enunţ.
Egalitate avem dacă $a = b = c$ cu $abc = \dfrac{1}{8}$, adică $a = b = c = \dfrac{1}{2}$.

[1] Dintr-o scăpare de-a noastră, enunţul problemei a apărut incomplet în numărul 4/2012 al revistei.

OBJ.28. Fie $p_1, p_2, \ldots, p_{36}$ numere prime mai mari sau egale cu 5. Arătaţi că numărul $p_1^6 + p_2^6 + \cdots + p_{36}^6$ este divizibil cu 36.

Marian Cucoaneş

Soluţie: Cum $3 \nmid p_k$, rezultă $p_k^2 \equiv 1 \pmod 3$. În plus $p_k \equiv 1 \pmod 2$ implică $p_k^2 \equiv 1 \pmod 4$ şi $p_k^6 \equiv 1 \pmod 4$. Apoi $p_k^6 - 1 = (p_k^2 - 1)(p_k^4 + p_k^2 + 1)$. Cum ambii factori sunt divizibili cu 3, $p_k^6 \equiv 1 \pmod 9$, deci $p_k^6 \equiv 1 \pmod{36}$. Atunci $\displaystyle\sum_{k=1}^{36} p_k^6 \equiv 0 \pmod{36}$.

OBJ.29. Fie n un număr natural, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ numere prime distincte fixate şi $A = \{p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \mid \alpha_i \in \mathbb{N},\ i = \overline{1,n}\}$. Arătaţi că oricum am alege:
a) $2^n + 1$ elemente din A, există printre ele două cu produsul pătrat perfect;
b) $(3^n + 3) : 2$ elemente din A, există printre ele două cu produsul cub perfect;
c) $2^{2n-1} + 2^{n-1} + 1$ elemente din A, există printre ele două cu produsul *bipătrat perfect* (x este *bipătrat perfect* dacă $x = y^4$, $y \in \mathbb{N}$).

Petru Braica

Soluţie: **a)** Partiţionăm elementele mulţimii A în submulţimi după parităţile exponenţilor α_i. Două elemente $p_1^{\alpha_n} ... p_1^{\alpha_n}$ şi $p_1^{\beta_1} ... p_1^{\beta_n}$ vor fi în aceeaşi submulţime dacă $2 \mid \alpha_j - \beta_j$, $\forall j = \overline{1,n}$. Vor fi 2^n astfel de submulţimi, deci alegând $2^n + 1$ elemente din A, conform principiului cutiei, vor exista două într-o aceeaşi submulţime. Produsul acestora va fi un pătrat perfect.
b), c) Afirmaţia problemei este greşită: putem alege oricâte numere de forma $p_1 p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$; produsul lor se va divide cu p_1^2 dar nu şi cu p_1^3 deci nu va fi nici cub, nici bipătrat perfect.

OBJ.30. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, are loc inegalitatea

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2a}{2a+b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{2b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{2c}{a+b+2c} \geqslant 3.$$

Titu Zvonaru

Soluţie: Relaţia se scrie echivalent
$\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b} \geqslant \left(1 - \dfrac{2a}{2a+b+c}\right) + \left(1 - \dfrac{2b}{a+2b+c}\right) + \left(1 - \dfrac{2c}{a+b+2c}\right)$ adică
$\dfrac{b+c}{(a+b)+(c+a)} + \dfrac{c+a}{(a+b)+(b+c)} + \dfrac{a+b}{(b+c)+(c+a)} \leqslant \dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}.$
Folosind inegalitatea $\dfrac{1}{x+y} \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$, $\forall x, y > 0$ (care este echivalentă cu $(x-y)^2 \geqslant 0$) obţinem $\dfrac{1}{(a+b)+(c+a)} \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b} + \dfrac{1}{c+a}\right)$, de unde $\dfrac{b+c}{(a+b)+(c+a)} \leqslant \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b+c}{a+b} + \dfrac{b+c}{c+a}\right)$ şi analoagele. Este suficient să demonstrăm atunci că $\dfrac{1}{4}\sum\left(\dfrac{b+c}{a+b} + \dfrac{b+c}{c+a}\right) \leqslant \sum \dfrac{a}{b+c}$ adică $\dfrac{1}{4}\sum \dfrac{a+b+2c}{a+b} \leqslant \sum \dfrac{a}{b+c}$ sau $\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\sum \dfrac{a}{b+c} \leqslant \sum \dfrac{a}{b+c}$, deci $\sum \dfrac{a}{b+c} \geqslant \dfrac{3}{2}$ care este adevărată (inegalitatea lui Nesbitt). Egalitate avem dacă $a = b = c$.

RMT 2/2013

OBJ.31. Pe un cerc sunt scrise numerele naturale de la 1 la N astfel încât fiecare două numere vecine să aibă cel puţin o cifră comună. Să se găsească cel mai mic număr N pentru care se poate realiza acest lucru şi să se dea un astfel de exemplu.

Adrian Burlan, Olimpiada locală Vâlcea, 2010

Soluţie: Deoarece numărul 1 apare pe cerc, trebuie să apară cel puţin şi 10 şi 11, deci implicit şi 9. Dar atunci trebuie să apară pe cerc şi 19 şi 29. Aşadar $N \geqslant 29$.
Vom demonstra că pentru $N = 29$ putem plasa numerele de la 1 la N astfel încât fiecare două numere vecine să aibă cel puţin o cifră comună. Iată un exemplu de cum putem dispune numerele pe cerc: 19, 9, 29, 28, 8, 18, 17, 7, 27, 26, 6, 16, 15, 5, 25, 24, 4, 14, 13, 3, 23, 22, 2, 12, 11, 1, 21, 20, 10.

OBJ.32. Fie $S_i = \{n \in \mathbb{N} \mid 100i \leqslant n < 100(i+1)\}$. De exemplu, $S_4 = \{400, 401, \ldots, 499\}$. Câte dintre mulţimile $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_{999}$ nu conţin niciun pătrat perfect?

Concurs SUA, 2008

Soluţie: Fiecare din mulţimile $S_0, S_1, \ldots, S_{24}$ conţine pătrate perfecte.
Pentru $n \geqslant 25$ niciuna din mulţimile S_n nu conţine mai mult de un pătrat perfect. Într-adevăr, dacă $k^2, (k+1)^2 \in S_n$ atunci $2k+1 < 100$, deci $k < 50$, de unde $k^2 < 2500$, deci $n < 25$. Rămâne să vedem câte din mulţimile $S_{25}, S_{26}, \ldots, S_{999}$ nu conţin pătrate perfecte. Reuniunea lor conţine pătratele numerelor $50, 51, \ldots, [\sqrt{99999}] = 316$, adică 267 de pătrate. Astfel 267 dintre mulţimile $S_{25}, S_{26}, \ldots, S_{999}$ conţin (exact) un pătrat perfect; celelalte 708 nu conţin pătrate perfecte.

OBJ.33. Arătaţi că

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}} + \frac{c+a}{\sqrt{b}} + \frac{a+b}{\sqrt{c}} \geqslant \sqrt{2b+2c} + \sqrt{2c+2a} + \sqrt{2a+2b}, \quad \forall\, a, b, c > 0.$$

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Rescriem membrul stâng sub forma $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) + \left(\frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{b}}\right) + \left(\frac{c}{\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{c}}\right)$. Ar fi suficient să arătăm că $\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) \geqslant \sqrt{2(a+b)}$ şi analoagele. Folosind inegalitatea din problema **O.VIII.324.** scrisă pentru perechile $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$, $(\sqrt{b}, \sqrt{c})$, $(\sqrt{c}, \sqrt{a})$, rezultă inegalitatea dorită. Egalitatea are loc dacă $a = b = c$.

OBJ.34. Fie $a, b, c > 0$. Arătaţi că

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + 2abc(a+b+c) \geqslant 5(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Marian Cucoaneş

Soluţia 1: Vom demonstra mai întâi inegalitatea
$a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2bc \geqslant 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + b^2c^2 \qquad (1).$
Într-adevăr, inegalitatea (1) se scrie $a^4 - 2a^2(b^2 + c^2 - bc) + b^4 + c^4 - b^2c^2 \geqslant 0$, sau încă $a^4 - 2a^2(b^2 + c^2 - bc) + (b^2 + c^2 - bc)^2 - (b^2 + c^2 - bc)^2 + b^4 + c^4 - b^2c^2 \geqslant 0$, care se mai scrie $(a^2 - b^2 - c^2 + bc)^2 + 2bc(b-c)^2 \geqslant 0$, inegalitate evidentă. Egalitate avem pentru $a = b = c$.
Scriind încă două relaţii analoage şi adunând obţinem inegalitatea din enunţ, cu egalitate dacă $a = b = c$.
Soluţia 2: Din inegalitatea lui Schur avem $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geqslant a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3$, cu egalitate dacă $a = b = c$ (asta deoarece $a, b, c > 0$, altfel ar mai fi fost şi alte cazuri de egalitate).
Evident $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, cu egalitate dacă $a = b = c$.
Cu cele de mai sus, este suficient să demonstrăm că $a^3b + ab^3 + b^3c + bc^3 + c^3a + ca^3 \geqslant 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$ care rezultă din $a^3b + ab^3 - 2a^2b^2 = ab(a-b)^2 \geqslant 0$ şi analoagele (sau cu inegalitatea lui Muirhead). Egalitate avem dacă $a = b = c$.

OBJ.35. Demonstraţi că dacă $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$, atunci

$$\sqrt{\frac{a_1}{1}} + \sqrt{\frac{a_2}{2}} + \sqrt{\frac{a_3}{3}} + \ldots + \sqrt{\frac{a_n}{n}} \geqslant \sqrt{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Dan Nedeianu

Soluţie: Avem, pentru orice $k=\overline{1,n}$, $k\cdot a_k \leqslant a_1+a_2+\ldots+a_k \leqslant a_1+a_2+\ldots+a_n \overset{\text{not}}{=} S$. Atunci $a_k \leqslant \dfrac{S}{k}$, de unde $\sqrt{\dfrac{a_k}{k}} \geqslant \dfrac{a_k}{\sqrt{S}}$. Prin adunare rezultă inegalitatea de demonstrat.

OBJ.36. Dacă a,b,c,d sunt numere reale pozitive astfel încât $a^2+b^2+c^2+d^2=1$, demonstraţi inegalitatea
$$\frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+cd}+\frac{c^2}{c^2+da}+\frac{d^2}{d^2+ab} \geqslant 1+16abcd.$$

Florin Stănescu

Soluţie: Pornim de la $\displaystyle\sum_{cicl}\frac{a^2-bc}{a^2+bc}=\sum_{cicl}\frac{(a^2+bc)(a^2-bc)}{(a^2+bc)^2}=\sum_{cicl}\frac{a^4-(bc)^2}{(a^2+bc)^2}=$
$\displaystyle\sum_{cicl}\frac{(a^2)^2}{(a^2+bc)^2}-\sum_{cicl}\frac{(bc)^2}{(a^2+bc)^2}$.

Aplicând acum inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz, obţinem că
$$\sum_{cicl}\frac{a^2-bc}{a^2+bc} \geqslant \frac{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{(a^2+bc)^2+(b^2+cd)^2+(c^2+da)^2+(d^2+ab)^2}-\sum_{cicl}\frac{(bc)^2}{(a^2+bc)^2}.$$
În continuare vom demonstra că $(a^2+bc)^2+(b^2+cd)^2+(c^2+da)^2+(d^2+ab)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ (1). Desfăcând parantezele şi regrupând convenabil, această inegalitate revine la $(ab-bc)^2+(bc-bd)^2+(ca-cd)^2+(da-db)^2 \geqslant 0$, inegalitate evidentă în care avem egalitate dacă $a=b=c=d$. Avem aşadar
$$\sum_{cicl}\frac{a^2-bc}{a^2+bc}\geqslant 1-\sum_{cicl}\frac{(bc)^2}{(a^2+bc)^2},\text{ deci }\sum_{cicl}\frac{a^2}{a^2+bc}\geqslant 1+\sum_{cicl}\frac{bc}{a^2+bc}-\sum_{cicl}\frac{(bc)^2}{(a^2+bc)^2}=$$
$$1+\sum_{cicl}\frac{a^2bc}{(a^2+bc)^2}\overset{CBS}{\geqslant} 1+\frac{(a\sqrt{bc}+b\sqrt{cd}+c\sqrt{da}+d\sqrt{ab})^2}{(a^2+bc)^2+(b^2+cd)^2+(c^2+da)^2+(d^2+ab)^2}\overset{\text{medii}}{\geqslant}$$
$$1+\frac{(4\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2})^2}{(a^2+bc)^2+(b^2+cd)^2+(c^2+da)^2+(d^2+ab)^2}\overset{(1)}{\geqslant} 1+\frac{16abcd}{(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}=1+16abcd.$$
Egalitate avem pentru $a=b=c=d=1/2$.

OBJ.37. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Cercul A-exînscris este tangent laturii BC în punctul M, iar prelungirilor laturilor AB, AC în punctele N, respectiv P. Demonstraţi că dacă $OP \perp MN$, atunci $R=r_a$.

Titu Zvonaru

Soluţie: Cum $BN=BM$ rezultă că $m(\sphericalangle BNM)=\dfrac{m(\sphericalangle B)}{2}$, deci $MN \parallel BB'$, unde B' este piciorul bisectoarei din B. Fie $\{R\}=OP\cap BB'$ şi I_a centrul cercului A-exînscris. Avem $PO\perp BB'$ şi $I_aB\perp BB'$. Ducem $I_aS\perp OP$, $S\in OP$. Vom arăta că $\Delta OBR\equiv\Delta PI_aS$. Cum RBI_aS este dreptunghi, cele două triunghiuri sunt dreptunghice şi $BR=I_aS$. Avem $m(\sphericalangle OBR)=|m(\sphericalangle OBA)-m(\sphericalangle B'BA)|=\left|90^\circ-m(\sphericalangle C)-\dfrac{m(\sphericalangle B)}{2}\right|$ (1). Cum $I_aP\perp AC$, rezultă că patrulaterul $B'BI_aP$ este inscriptibil. Atunci $m(\sphericalangle PI_aS)=|m(\sphericalangle PI_aB)-m(\sphericalangle BI_aS)|=|m(\sphericalangle AB'B)-90^\circ|=\left|m(\sphericalangle C)+\dfrac{m(\sphericalangle B)}{2}-90^\circ\right|$ (2). Din (1) şi (2) rezultă $\sphericalangle OBR\equiv\sphericalangle PI_aS$, deci $\Delta OBR\equiv\Delta PI_aS$ (CU), de unde $I_aP=BO$, adică $R=r_a$.

Observaţie: Congruenţa $\sphericalangle OBR\equiv\sphericalangle PI_aS$ se putea arăta şi ducând înălţimea BT şi verificând că $\sphericalangle OBR\equiv\sphericalangle RBT\equiv\sphericalangle SI_aP$ (unghiuri cu laturile paralele).

RMT 4/2013

OBJ.38. Arătaţi că pentru orice numere naturale nenule a şi b, numărul $\sqrt{3a^2+4b^2}+\sqrt{4a^2+3b^2}$ este iraţional.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Fie $d=(a,b)$ şi $a',b'\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $a=da'$ şi $b=db'$. Condiţia din enunţ revine la $d\left(\sqrt{3a'^2+4b'^2}+\sqrt{4a'^2+3b'^2}\right)$ este iraţional, deci la faptul că $\left(\sqrt{3a'^2+4b'^2}+\sqrt{4a'^2+3b'^2}\right)$ este iraţional. Putem aşadar presupune că $(a,b)=1$. Se ştie că, dacă pentru $n,m\in\mathbb{N}$, $\sqrt{n}+\sqrt{m}\in\mathbb{Q}$ atunci n şi m sunt pătrate perfecte. Astfel, presupunând că ar exista $a,b\in\mathbb{N}^*$ pentru care numărul $\sqrt{3a^2+4b^2}+\sqrt{4a^2+3b^2}$ este raţional, obţinem că există $k,\ell\in\mathbb{N}$ astfel încât $3a^2+4b^2=k^2$ şi $4a^2+3b^2=\ell^2$. Dar atunci $k^2+\ell^2=7(a^2+b^2)$ este divizibil cu 7. Se ştie că o sumă de două pătrate perfecte este divizibilă cu un număr prim de forma $p=M4+3$ numai dacă fiecare din cele două pătrate este divizibil cu p. Cum 7 este de această formă, rezultă că $7\mid k$ şi $7\mid\ell$, de unde $49\mid 7(a^2+b^2)$, adică $7\mid a^2+b^2$. Rezultă $7\mid a$ şi $7\mid b$, în contraditie cu presupunerea că $(a,b)=1$.

OBJ.39. Fie numerele întregi nenule a şi b, prime între ele, care satisfac proprietatea $a\cdot b\mid a^n+b^n+1$, unde $n\in\mathbb{N}$ şi $n\geqslant 2$. Arătaţi că $a\mid b^n+1$ şi că, dacă $c\in\mathbb{Z}$ este astfel încât $a\cdot c=b^n+1$, atunci $b\cdot c\mid b^n+c^n+1$.

Constantin Chirilă

Soluţie: Din $ab\mid a^n+b^n+1$ rezultă că $a\mid a^n+b^n+1$, deci $a\mid b^n+1$.
Avem că $\dfrac{b^n+c^n+1}{bc}=\dfrac{ac+c^n}{bc}=\dfrac{a+c^{n-1}}{b}=\dfrac{a^n+(b^n+1)^{n-1}}{a^{n-1}b}$. Să observăm că $a^{n-1}\mid a^n$ şi $a^{n-1}\mid(b^n+1)^{n-1}$ (pentru că $a\mid b^n+1$) şi că $(a,b)=1$. Într-adevăr dacă $d=(a,b)$, atunci $d\mid ab$, deci $d\mid a^n+b^n+1$ şi deci $d\mid(a^n+b^n+1)-a^n-b^n$ de unde $d=1$. Pentru a arăta că $\dfrac{b^n+c^n+1}{bc}\in\mathbb{N}$ rămâne să mai arătăm că $b\mid a^n+(b^n+1)^{n-1}$. Într-adevăr, $a^n+(b^n+1)^{n-1}=a^n+\mathcal{M}b+1$, ori din $ab\mid a^n+b^n+1$ rezultă $b\mid a^n+1$, deci $b\mid a^n+b^n+1$, de unde concluzia.

OBJ.40. Fie $a,b,c\in(0,\infty)$ cu $abc=1$. Arătaţi că
$$\frac{3}{a+b+c}\leqslant\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\leqslant 1.$$

Mugurel Alex. Szőrös

Soluţie: Inegalitatea din dreapta este un caz particular al problemei **IX.369.** din RMT nr.4/2013 (autor *Gheorghe Szöllősy*). Fie $x,y,z>0$ astfel încât $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. Atunci $xyz=1$. Folosind cunoscuta inegalitate $x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2$, $\forall\,x,y>0$ şi analoagele ei (este echivalentă cu $(x+y)(x-y)^2\geqslant 0$) precum şi condiţia $abc=1$ avem că $\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1}=$
$\dfrac{1}{x^3+y^3+xyz}+\dfrac{1}{y^3+z^3+xyz}+\dfrac{1}{z^3+x^3+xyz}\leqslant\dfrac{1}{x^2y+xy^2+xyz}+\dfrac{1}{y^2z+yz^2+xyz}+$
$\dfrac{1}{z^2x+zx^2+xyz}=\dfrac{1}{xy(x+y+z)}+\dfrac{1}{yz(x+y+z)}+\dfrac{1}{zx(x+y+z)}=$
$\dfrac{z}{x+y+z}+\dfrac{x}{x+y+z}+\dfrac{y}{x+y+z}=1$. Egalitate avem dacă $x=y=z=1$.
Pentru inegalitatea din dreapta folosim inegalitatea lui Bergström: $\dfrac{1}{x^3+y^3+1}+\dfrac{1}{y^3+z^3+1}+$
$\dfrac{1}{z^3+x^3+1}\geqslant\dfrac{(1+1+1)^2}{2(x^3+y^3+z^3)+3}\geqslant\dfrac{3}{x^3+y^3+z^3}$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $x^3+y^3+y^3\geqslant 3$ ceea ce rezultă din inegalitatea mediilor: $x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz=3$.
Din nou, egalitate avem dacă $x=y=z=1$.

OBJ.41. Pentru $x, y, z > 0$, demonstraţi că au loc inegalităţile:

$$\frac{y^2+z^2}{yz+1}+\frac{z^2+x^2}{zx+1}+\frac{x^2+y^2}{xy+1} \geqslant \frac{x(y+z)}{yz+1}+\frac{y(z+x)}{zx+1}+\frac{z(x+y)}{xy+1} \geqslant \frac{2yz}{yz+1}+\frac{2zx}{zx+1}+\frac{2xy}{xy+1}.$$

Vasile Pravăţ, Titu Zvonaru

Soluţie: Pentru a demonstra inegalitatea din stânga, scriem

$$\sum_{\text{cicl}} \frac{y^2+z^2-x(y+z)}{yz+1} = \sum_{\text{cicl}} \left(\frac{y(y-x)}{yz+1}+\frac{z(z-x)}{yz+1}\right) = \sum_{\text{cicl}} \frac{y(y-x)}{yz+1} +$$

$$dis\text{cicl}\, \frac{z(z-x)}{yz+1} = \sum_{\text{cicl}} \frac{y(y-x)}{yz+1} + \sum_{\text{cicl}} \frac{x(x-y)}{zx+1} = \sum_{\text{cicl}} \left(\frac{y(y-x)}{yz+1}+\frac{x(x-y)}{zx+1}\right) =$$

$$\sum_{\text{cicl}} \frac{(x-y)^2}{(yz+1)(zx+1)} \geqslant 0,$$

inegalitate evidentă. Egalitate avem pentru $x = y = z$.

Notând $xy = a$, $yz = b$, $zx = c$, $(a, b, c > 0)$, inegalitatea din dreapta revine la

$$\sum_{\text{cicl}} \frac{a+b}{c+1} \geqslant \sum_{\text{cicl}} \frac{2c}{c+1}, \text{ adică } \sum_{\text{cicl}} \frac{a+b-2c}{c+1} \geqslant 0.$$

Vom prezenta două demonstraţii ale acestei inegalităţi.

1. Avem $\displaystyle\sum_{\text{cicl}} \frac{a+b-2c}{c+1} = \sum_{\text{cicl}} \left(\frac{a-c}{c+1}+\frac{b-c}{c+1}\right) = \sum_{\text{cicl}} \frac{a-c}{c+1} + \sum_{\text{cicl}} \frac{b-c}{c+1} = \sum_{\text{cicl}} \frac{a-c}{c+1} + \sum_{\text{cicl}} \frac{c-a}{a+1} =$ $\displaystyle\sum_{\text{cicl}} \left(\frac{a-c}{c+1}-\frac{a-c}{a+1}\right) = \sum_{\text{cicl}} \frac{(a-c)^2}{(a+1)(c+1)} \geqslant 0$, cu egalitate dacă $a = b = c$ (ceea ce înseamnă $x = y = z$ pentru inegalitatea iniţială).

2. Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune $a \leqslant b \leqslant c$. Atunci $\dfrac{1}{a+1} \geqslant \dfrac{1}{b+1} \geqslant \dfrac{1}{c+1}$. Din inegalitatea lui Cebâşev, $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}\right) \geqslant 3\left(\dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}+\dfrac{c}{c+1}\right)$, de unde concluzia rezultă imediat.

OBJ.42. Sunt $2n$ bile $(n \geqslant 2)$, având două greutăţi distincte: unele mai grele (G), altele mai uşoare (U). (Există bile de ambele feluri.) Dispunem de un cântar cu două talere, fără greutăţi. Arătaţi că prin cel mult $n+1$ cântăriri se poate stabili numărul bilelor uşoare şi al celor grele.

Gheorghe Szöllősy

(generalizarea unei probleme date la Olimpiadă în Kiev)

Soluţie: Vom nota cu EE...E mai multe bile de aceeaşi greutate (fără să ştim neapărat dacă sunt uşoare sau grele). Observaţia de bază este că, dacă la un moment dat cunoaştem un cuplu de bile UG, în continuare, prin câte o cântărire, putem determina felul de a fi al două bile necunoscute astfel: comparăm bilele UG cu cele două bile necunoscute: dacă balanţa rămâne în echilibru, bilele necunoscute sunt UG; dacă talerul pe care se află grupul UG coboară, bilele necunoscute sunt UU, iar dacă talerul cu grupul UG urcă, bilele necunoscute sunt GG. Va trebui aşadar să „facem rost" de un cuplu UG. Procedăm în felul următor. Prima dată aşezăm pe fiecare taler câte o bilă aleasă la întâmplare. Dacă nu sunt în echilibru, avem deja un grup UG. În acest caz, conform observaţiei, mai sunt necesare $n-1$ cântăriri, adică în total n, pentru a stabili numărul bilelor de fiecare fel. Dacă la prima cântărire balanţa rămâne în echilibru, ele sunt EE. Le comparăm cu alte două bile. Dacă avem iarăşi echilibru, atunci şi aceste bile sunt tot EE. Continuăm să comparăm grupul EE cu grupuri de 2 bile netestate, până când echilibrul se rupe (şi se va rupe la un moment dat, pentru că nu sunt toate bilele identice). Să zicem că am efectuat, până la ruperea echilibrului,

k cântăriri, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, găsind $\underbrace{\text{EE}\ldots\text{E}}_{2k}$ bile de aceeaşi greutate (prima cântărire a vizat câte o bilă, celelalte $k-1$ comparări cu grupuri care s-au dovedit a fi EE). Dacă în momentul în care echilibrul se rupe, grupul EE urcă, atunci E = U, iar dacă EE coboară, atunci E = G. Plasăm acum cele două bile necunoscute pe câte un taler şi determinăm felul lor astfel: dacă EE a urcat, atunci cel puţin una din bilele necunoscute este G, iar compararea lor ne va lămuri dacă bilele necunoscute sunt UG sau GG. La fel, dacă EE a coborât, cel puţin una din bilele necunoscute este U, iar compararea bilelor necunoscute ne va permite să distingem între UG şi UU. Până aici am efectuat $k+2$ cântăriri, stabilind felul a $2k+2$ bile şi identificând şi o pereche UG. Folosind această pereche, conform observaţiei, din $\dfrac{2n-(2k+2)}{2} = n-k-1$ putem stabili felul bilelor rămase. Am putut aşadar stabili felul tuturor bilelor, şi asta din $(k+2)+(n-k-1) = n+1$ cântăriri.

OBJ.43. Fie $ABCD$ un romb, M mijlocul laturii AD şi $\mathcal{C}$ cercul tangent la AB în B şi la AD în D. Notăm cu E şi F punctele de intersecţie diferite de B ale cercului $\mathcal{C}$ cu dreptele BM şi BC. Demonstraţi că A, E şi F sunt puncte coliniare.

Cornelia Vizman

Soluţia 1: Mai întâi observăm că triunghiurile BDF şi BAD sunt asemenea. Într-adevăr, $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle DBF \equiv \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle BFD$ (ultimele două unghiuri subîntind acelaşi arc al cercului $\mathcal{C}$, anume BD). Fie B' simetricul lui B faţă de M. Din congruenţa triunghiurilor ADF şi $B'DB$ (cazul de congruenţă LUL; un triunghi se obţine rotindu-l pe celălalt în jurul lui D cu un unghi de măsură $m(\sphericalangle BAD)$) deducem că $\sphericalangle EBD$ şi $\sphericalangle AFD$ sunt unghiuri congruente. Dar şi unghiurile $\sphericalangle EBD$ şi $\sphericalangle EFD$ sunt congruente (au vârfurile pe cerc şi subîntind acelaşi arc ED). Rezultă că unghiurile AFD şi EFD sunt congruente, deci punctele A, E, F sunt coliniare.
Observaţie: (Mircea Fianu) Problema este o reciprocă a unui caz limită ($R = S$) a problemei 2 de la Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori, Veria (Grecia), 2005, problemă propusă de *Virgil Nicula*. De fapt, problema de mai sus se poate rezolva similar problemei de la OBMJ 2005 astfel:
Soluţia 2: (bazată pe soluţia lui Virgil Nicula a problemei de la OBMJ 2005)
Ca la soluţia 1 se arată că $\sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle BAD$. Apoi $MA^2 = MD^2 = ME \cdot MB$ (puterea punctului M faţă de cercul $\mathcal{C}$). De aici rezultă că triunghiurile MAB şi MEA sunt asemenea, de unde $\sphericalangle MEA \equiv \sphericalangle MAB$. Avem, aşadar, că $\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle FDB \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle AEM$, de unde rezultă că punctele A, E, C sunt coliniare.

OBJ.44. Pe un cerc de centru O se consideră punctele distincte A, B, C, D. Fie E punctul de intersecţie al dreptelor AB şi CD, iar M şi N mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[BD]$. Dacă MN este perpendiculară pe OE, demonstraţi că dreptele AD şi BC sunt paralele.
(generalizare a problemei G3 din lista scurtă de la OBMJ 2012 unde se dădea în plus că $AB \perp CD$)

Mircea Fianu

Soluţie: (Mircea Fianu) Distingem două situaţii după cum E este în interiorul sau exteriorul cercului. Începutul e acelaşi:
$MN \perp OE$ implică $ME^2 - NE^2 = OM^2 - ON^2 = R^2 - \dfrac{AC^2}{4} - R^2 + \dfrac{BD^2}{4} = \dfrac{BD^2 - AC^2}{4}$ (1).

Pe de altă parte, $\angle CAE \equiv \angle BDE$ implică $\Delta ACE \sim \Delta DBE$, de unde şi $\Delta AME \sim \Delta DNE$, deci $\dfrac{ME}{NE} = \dfrac{MA}{ND} = \dfrac{AC}{BD}$ (2).

Din (1) şi (2) constatăm că $ME > NE \Leftrightarrow BD > AC \Leftrightarrow ME < NE$, fals, deci trebuie neapărat ca $ME = NE$, deci şi $AC = BD$. În ambele situaţii (referitoare la ordinea punctelor pe cerc), rezultă $AD \parallel BC$.

OBJ.45. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $3 \cdot 10^x + 1 = y^2$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Dacă $x = 0$, atunci $y = 2$. Căutăm soluţii cu $x > 0$. Avem $3 \cdot 2^x \cdot 5^x = (y-1)(y+1)$. Trebuie ca $(y-1)(y+1)$ să fie par, deci y să fie impar. Atunci $(y-1, y+1) = 2$, deci unul dintre factorii $y-1$ şi $y+1$ va fi divizibil cu $2 \cdot 5^x$. Prin urmare, unul dintre factorii $y-1$ şi $y+1$ va fi cel puţin $2 \cdot 5^x$, iar celălalt va fi cel mult $3 \cdot 2^{x-1}$. Dar acest lucru este imposibil, pentru că diferenţa dintre $y+1$ şi $y-1$ este 2, în vreme ce $2 \cdot 5^x - 3 \cdot 2^{x-1} > 2$, $\forall x \geqslant 1$. Prin urmare, singura soluţie a ecuaţiei este $x = 0$, $y = 2$.

OBJ.46. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic, M proiecţia lui A pe latura BC şi $\sphericalangle CAX$ adiacent cu $\sphericalangle BAC$ astfel încât $\sphericalangle CAX \equiv \sphericalangle BAM$. Dacă $MD \perp AX$, $(D \in AX)$, $\{E\} = MD \cap AC$ şi $\{T\} = BE \cap AX$, demonstraţi că centrul cercului circumscris triunghiului ABT aparţine dreptei AM.

Titu Zvonaru

Soluţie: Deoarece $\sphericalangle AEM$ este unghi exterior triunghiului ADE, avem $m(\sphericalangle AEM) = m(\sphericalangle EAD) + m(\sphericalangle EDA) = m(\sphericalangle BAM) + 90° = 90° - m(\sphericalangle ABC) + 90° = 180° - m(\sphericalangle ABM)$, deci patrulaterul $ABME$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\sphericalangle AEB) = m(\sphericalangle AMB) = 90°$, adică $AE \perp BT$. În triunghiul ABT, dreapta AM este izogonala înălţimii, şi se ştie că izogonala înălţimii este diametrul cercului circumscris care pleacă din acel vârf, adică $O \in AM$.

OBJ.47. Arătaţi că numărul 123 are o infinitate de multipli de forma $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ ori}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ ori}}\underbrace{33\ldots3}_{n\text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Observăm că $33333 = 123 \cdot 271$. Vom demonstra că $a_k = \underbrace{11\ldots1}_{5k\text{ ori}}\underbrace{22\ldots2}_{5k\text{ ori}}\underbrace{33\ldots3}_{5k\text{ ori}}$, $k \in \mathbb{N}^*$, este divizibil cu 123. Avem că $a_k = \underbrace{11\ldots1}_{5k\text{ ori}} \cdot 10^{10k} + 2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{5k\text{ ori}} \cdot 10^{5k} + 3 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{5k\text{ ori}} = \underbrace{11\ldots1}_{5k\text{ ori}}(10^{10k} + 2 \cdot 10^{5k} + 3)$. Evident, numărul din paranteză, având suma cifrelor 6, este divizibil cu 3. Pe de altă parte, $\underbrace{11\ldots1}_{5k\text{ ori}} = \dfrac{10^{5k}-1}{9} =$
$\dfrac{(10^5-1)(1+10^5+10^{10}+\ldots+10^{5(k-1)})}{9} = 11111 \cdot (1 + 10^5 + 10^{10} + \ldots + 10^{5(k-1)})$ care este divizibil cu 11111. Prin urmare, am arătat că a_k este divizibil cu 33333, deci şi cu 123.

Observaţie (Gheorghe Stoica): Şi numerele $b_k = \underbrace{11\ldots1}_{5k+1\text{ ori}}\underbrace{22\ldots2}_{5k+1\text{ ori}}\underbrace{33\ldots3}_{5k+1\text{ ori}}$, $k \in \mathbb{N}$, sunt divizibile cu 123.

Generalizare (Gheorghe Stoica): Arătaţi că numărul 123456789 are o infinitate de multipli de forma $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ ori}}\underbrace{22\ldots2}_{n\text{ ori}}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ ori}}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie: Fie $t = 123456789$. Din teorema lui Euler, cum $(t, 10) = 1$, avem $10^{\varphi(t)} \equiv 1 \pmod{t}$, unde φ este indicatorul lui Euler. Luând $p_k = k\varphi(t) + 1$, avem $10^{p_k} \equiv 10 \pmod{t}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$. Alegem $a_k = \underbrace{11\ldots1}_{p_k\text{ ori}}\underbrace{22\ldots2}_{p_k\text{ ori}}\ldots\underbrace{99\ldots9}_{p_k\text{ ori}}$ şi demonstrăm că $a_k \equiv 0 \pmod{t}$, adică toţi aceşti a_k sunt multipli de forma dorită ai lui t. Avem $a_k = \underbrace{11\ldots1}_{p_k\text{ ori}}(10^{8p_k} + 2 \cdot 10^{7p_k} + \ldots + 8 \cdot 10^{p_k} + 9) \equiv \underbrace{11\ldots1}_{p_k\text{ ori}}(10^8 + 2 \cdot 10^7 + \ldots + 8 \cdot 10 + 9) \equiv 0 \pmod{t}$.

OBJ.48. Aflaţi cel mai mare număr real n pentru care inegalitatea

$$a^5+b^5+c^5+nabc \leqslant 1+nabc\,(ab+bc+ca)$$

are loc pentru orice $a,b,c>0$ cu $a+b+c=1$.

Mugurel Alex. Szőrös

Soluţie: Pentru ca inegalitatea să fie verificată de $a=b=c=\frac{1}{3}$ trebuie ca $3\cdot\frac{1}{3^5}+n\cdot\frac{1}{27}\leqslant 1+n\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{3}{3^2}$, adică $n\leqslant 40$. Vom demonstra că inegalitatea are loc pentru $n=40$, de unde va rezulta că cea mai mare valoare a lui n pentru care inegalitatea este îndeplinită este $n=40$.
Vom arăta că $a^5+b^5+c^5+40abc(a+b+c)^2\leqslant(a+b+c)^5+40abc\,(ab+bc+ca)$. Desfăcând parantezele şi reducând termenii asemenea, inegalitatea revine la $20(a^3bc+ab^3c+abc^3)+10(a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2)\leqslant 5(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b)+10(a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2)$.
În termenii sumelor simetrice care intervin în inegalitatea lui Muirhead, inegalitatea se scrie $10[3,1,1]+5[2,2,1]\leqslant 5[4,1,0]+10[3,2,0]$. Cum $[2,2,1]\leqslant[4,1,0]$ şi $[3,1,1]\leqslant[3,2,0]$, din inegalitatea lui Muirhead rezultă imediat concluzia.
Altfel, evitând apelul la inegalitatea lui Muirhead:
Adunând inegalităţile evidente $2a^3bc\leqslant a^3b^2+a^3c^2$ şi analoagele, obţinem că $20(a^3bc+ab^3c+abc^3)\leqslant 10(a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2)$, iar adunând inegalităţile $2a^2b^2c\leqslant a^4c+b^4c$ şi analoagele, obţinem că $10(a^2b^2c+a^2bc^2+ab^2c^2)\leqslant 5(a^4b+a^4c+b^4a+b^4c+c^4a+c^4b)$, de unde concluzia.

OBJ.49. Fie $x,y,z\in(0,\infty)$ cu $x+y+z\leqslant 3$. Arătaţi că

$$\frac{1}{x+x^3}+\frac{1}{y+y^3}+\frac{1}{z+z^3}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Marian Cucoaneş

Soluţia 1: Putem scrie $\frac{1}{x+x^3}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$. Inegalitatea de demonstrat devine astfel $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}$. Dar $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant\frac{9}{x+y+z}\geqslant\frac{9}{3}=3$ (inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică), în vreme ce $\frac{3}{2}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}\leqslant 3$. Într-adevăr, este uşor de văzut că $\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}$ şi analoagele, de unde rezultă imediat inegalitatea dorită.

Soluţia 2: Se demonstrează uşor că $\frac{1}{x+x^3}\geqslant\frac{3}{2}-x$. Adunată cu analoagele, dă inegalitatea dorită.
Generalizare: (*Marin Chirciu, Gheorghe Stoica*) Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n\in(0,\infty)$, cu $x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant n$. Arătaţi că are loc inegalitatea: $\frac{1}{x_1+x_1^3}+\frac{1}{x_2+x_2^3}+\ldots+\frac{1}{x_n+x_n^3}\geqslant\frac{n}{2}$.

OBJ.50. Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi că există n numere întregi care au suma 0 şi produsul n dacă şi numai dacă n este divizibil cu 4.

* * *

Soluţie: Dacă n este impar şi $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{Z}$ au suma 0 şi produsul n, trebuie ca toate x_i-urile să fie impare şi deci ca o sumă de un număr impar de numere impare să fie 0, ceea ce nu se poate. Dacă n este par, printre cele n numere avem un număr impar de numere impare (pentru ca suma să poată fi 0) şi cel puţin un număr par. Cum n este par, avem că cel puţin două dintre numerele x_i sunt pare, deci n trebuie să fie multiplu de 4. Reciproc, dacă n este multiplu de 4, distingem două cazuri: I. $n=8k$, $k\in\mathbb{N}^*$, şi II. $n=8k+4$, $k\in\mathbb{N}$. În primul caz putem lua numerele $2,4k,\underbrace{-1,\,-1,\,\ldots,\,-1}_{6k\text{ numere}},\ \underbrace{1,1,\ldots,1}_{2k-2\text{ numere}}$. În al doilea caz putem lua numerele

$$-2,\, 4k+2,\, \underbrace{-1,\, -1,\, \ldots,\, -1}_{6k+1 \text{ numere}},\, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2k+1 \text{ numere}}.$$

OBJ.51. Centrul O al cercului $\mathscr{C}_1$ se află pe cercul $\mathscr{C}_2$. Cele două cercuri se taie în punctele X şi Y. Punctul Z este în exteriorul cercului $\mathscr{C}_1$ şi totodată pe cercul $\mathscr{C}_2$. Ştiind că $XZ = 13$, $OZ = 11$ şi $YZ = 7$, aflaţi raza cercului $\mathscr{C}_1$.

Concurs SUA, 2012

Soluţie: Patrulaterul $XOYZ$ este inscriptibil, deci unghiurile $\sphericalangle ZXO$ şi $\sphericalangle ZYO$ sunt suplementare. Notând $OX = OY = r$ şi aplicând teorema cosinusului în triunghiurile ZXO şi ZYO, obţinem $11^2 = 7^2 + r^2 - 14r\cos(\sphericalangle ZYO)$ şi $11^2 = 13^2 + r^2 - 26r\cos(\sphericalangle ZXO)$. Folosind că $\cos(\sphericalangle ZYO) = -\cos(\sphericalangle ZXO)$, înmulţind prima relaţie cu 13 şi a doua cu 7 şi adunând relaţiile obţinute, găsim $20 \cdot 11^2 = 7^2 \cdot 13 + 13^2 \cdot 7 + 20r^2$, de unde $r^2 = 30$, adică $r = \sqrt{30}$.

OBJ.52. Într-un amfiteatru, locurile sunt dispuse într-o reţea dreptunghiulară. La cursul de analiză, în amfiteatru erau exact 11 băieţi în fiecare rând şi exact 3 fete în fiecare coloană. În plus, două locuri erau goale. Care este numărul minim de locuri existente în amfiteatru?

Concurs Cehia, 2013

Soluţie: Notăm cu r şi c numărul rândurilor, respectiv coloanelor amfiteatrului. Ştim că $rc = 11r + 3c + 2$, ceea ce revine la $(r-3)(c-11) = 35$. Avem variantele $r-3 = 1$, $c-11 = 35$ (caz în care $rc = 4 \cdot 46 = 184$), $r-3 = 5$, $c-11 = 7$ (care duce la $rc = 8 \cdot 18 = 144$), $r-3 = 7$, $c-11 = 5$ (şi $rc = 10 \cdot 16 = 160$) şi $r-3 = 35$, $c-11 = 1$ (adică $rc = 38 \cdot 12 = 456$). Dintre acestea, cea care conduce la un număr minim de locuri ar fi varianta a doua, cu un amfiteatru cu 8 rânduri şi 18 coloane. Mai trebuie însă demonstrat că putem cu adevărat plasa studenţii într-un astfel de amfiteatru respectând condiţiile din enunţ. Iată o asemenea plasare (B=băiat, F=fată, G=loc gol)

F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B
F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	B
F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	B
B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F
B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	F
B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	F
B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	G
B	B	B	B	B	F	F	F	B	B	B	B	B	F	F	F	B	G

RMT 4/2014

OBJ.53. Fie $a \in (0,3]$. Arătaţi că dacă $x, y, z \in (0,\infty)$ au suma a, atunci $x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x} \leqslant a$.

Traian Tămâian

Soluţie: Avem $(x\sqrt{y} + y\sqrt{z} + z\sqrt{x})^2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{xy} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{yz} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{zx})^2 \overset{CBS}{\leqslant} (x+y+z)(xy + yz + zx) \leqslant (x+y+z) \cdot \dfrac{(x+y+z)^2}{3} = \dfrac{a^3}{3} \leqslant a^2$, de unde concluzia. Egalitatea are loc dacă $a = 3$ şi $x = y = z = 1$.

OBJ.54. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Notăm cu A', B', C' punctele diametral opuse punctelor A, B, respectiv C şi cu M, N, P simetricele punctului O faţă de laturile BC, CA, respectiv AB. Arătaţi că $MA' = NB' = PC'$.

Titu Zvonaru şi Neculai Stanciu

Soluţie: Se ştie că A' este simetricul lui H, ortocentrul triunghiului ABC, faţă de mijlocul lui $[BC]$. Dar şi M este simetricul lui O faţă de mijlocul lui $[BC]$, deci $OHMA'$ este paralelogram (posibil degenerat), prin urmare $MA' = OH$. Analog, $NB' = OH$ şi $PC' = OH$, de unde concluzia.

OBJ.55. Arătaţi că dacă $a, b, c \geqslant 2$, atunci $a^2 + b^2 + c^2 + 4(abc + 1) \geqslant 8(a + b + c)$.

Cătălin Cristea

Soluţie: Deoarece $a, b, c \geqslant 2$, avem $(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant 1$, adică $abc \geqslant ab+bc+ca-a-b-c+2 \geqslant 0$. De asemenea, $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$, adică $a^2 \geqslant 4a - 4$ şi analoagele. În plus, avem $(a - 1)(b - 1) \geqslant 1$, adică $ab \geqslant a + b$ şi analoagele. Atunci $a^2 + b^2 + c^2 + 4(abc + 1) \geqslant 4a - 4 + 4b - 4 + 4c - 4 + 4(ab + bc + ca - a - b - c + 2) + 4 = 4(ab + bc + ca) \geqslant 4(a + b + b + c + c + a) = 8(a + b + c)$. Egalitate avem pentru $a = b = c = 2$.

OBJ.56. Care este cea de-a 73-a cifră de la coadă a numărului $(\underbrace{111...11}_{112 \text{ cifre}})^2$?

Concurs KöMaL, Ungaria, 2001

Soluţie: Scriind unul sub altul numerele $\underbrace{111...11}_{112 \text{ cifre}}$ şi $\underbrace{111...11}_{112 \text{ cifre}}$ şi efectuând înmulţirea, se vede că cifra căutată este cea de-a 73-a cifră de la coadă a numărului $\underbrace{111\ldots11}_{73 \text{ de cifre}}+$

$$\underbrace{111\ldots11}_{72 \text{ de cifre}}0 + \underbrace{111\ldots11}_{71 \text{ de cifre}}00 + \ldots + 11\underbrace{000\ldots00}_{71 \text{ de cifre}}+1\underbrace{000\ldots00}_{72 \text{ de cifre}} = \frac{10^{73}-1}{9} + 10 \cdot \frac{10^{72}-1}{9} + 10^2 \cdot \frac{10^{71}-1}{9} + \ldots + 10^{71} \cdot \frac{10^2-1}{9} + 10^{72} \cdot \frac{10-1}{9} = \frac{1}{9} \cdot \left(73 \cdot 10^{73} - (1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{72})\right) = \frac{1}{9} \cdot (73 \cdot 10^{73} - \underbrace{111\ldots11}_{73 \text{ de cifre}}) = \frac{1}{9} \cdot 72\underbrace{888\ldots88}_{72 \text{ de cifre}}9 = \overline{800\underbrace{**\ast\ldots**}_{71 \text{ de cifre}}},$$ deci cifra căutată este 0.

OBJ.57. Scrierea în baza 10 a unui număr constă din 3^{2013} cifre de 3. Aflaţi cea mai mare putere a lui 3 care divide acest număr.

Olimpiadă Marea Britanie 2013

Soluţia 1: Demonstrăm prin inducţie după n că numărul, notat x_n, care constă din 3^n cifre de 3, se divide cu 3^{n+1}, dar nu şi cu 3^{n+2}. Pentru $n = 0$ afirmaţia este evidentă. Presupunând afirmaţia adevărată pentru x_n, grupăm cele 3^{n+1} cifre de 3 ale lui x_{n+1} în 3 grupe de câte 3^n. Obţinem că $x_{n+1} = \overline{(x_n)(x_n)(x_n)} = x_n(10^{2\cdot 3^n} + 10^{3^n} + 1)$. Din ipoteza de inducţie, primul factor se împarte cu 3^{n+1} (dar nu şi cu 3^{n+2}), iar cel de-al doilea, având suma cifrelor 3, se împarte cu 3, dar nu şi cu 9. Aşadar exponentul lui 3 în descompunerea lui x_{n+1} este $n + 2$ şi inducţia este încheiată. În particular, exponentul lui 3 în descompunerea în factori primi a lui x_{2013} este 2014.

Soluţia 2: Folosim *LTE (Lifting the Exponent Lemma)*: În cele ce urmează, $v_p(x)$ desemnează exponentul lui p în descompunerea în factori primi a lui x. Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi p este un număr prim impar astfel încât $p \mid x - y$, $p \nmid x$, $p \nmid y$, atunci $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$.

Dacă notăm cu N numărul din enunţ, atunci $3N = 10^{3^{2013}} - 1$. Conform LTE, $v_3(3N) = v_3(10 - 1) + v_3\left(3^{2013}\right) = 2 + 2013 = 2015$, deci $v_3(N) = 2014$.

OBJ.58. Pe o dreaptă se consideră $2n + 1$ puncte. $n + 1$ dintre acestea se colorează cu roşu, iar celelalte n cu albastru. Arătaţi că suma lungimilor segmentelor care au capetele de aceeaşi culoare este mai mică decât suma lungimilor segmentelor care au capetele de culori diferite.

prelucrare *Andrei Eckstein*

Soluţie: Ne uităm la un segment $[x, y]$ cu capetele în două puncte consecutive din cele $2n + 1$. Notăm cu r_s, a_s numărul punctelor roşii, respectiv albastre situate la stânga lui y (x este şi el numărat undeva) şi cu r_d, a_d numărul punctelor roşii, respectiv albastre situate la dreapta lui x. Lungimea lui $[x, y]$ va fi numărată de $a_s \cdot a_d + r_s \cdot r_d$ ori la segmentele cu capetele de aceeaşi culoare şi de $a_s \cdot r_d + a_d \cdot r_s$ ori la segmentele cu capetele de culori diferite. Cum însă $a_s \cdot a_d + r_s \cdot r_d \leqslant a_s \cdot r_d + a_d \cdot r_s \Leftrightarrow (a_s - r_s)(a_d - r_d) \leqslant 0 \Leftrightarrow (a_s - r_s)\big((n - a_s) - (n + 1 - r_s)\big) \leqslant 0 \Leftrightarrow (a_s - r_s)(a_s - r_s + 1) \geqslant 0$, ceea ce este adevărat pentru orice număr întreg $m = a_s - r_s$. Aşadar fiecare segment este numărat cel puţin de atâtea ori în componenţa segmentelor bicolore ca în componenţa celor monocolore. Făcând suma după toate aceste segmente se obţine proprietatea dorită.

OBJ.59. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că numerele $[\sqrt{n}]$ şi $\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$ au aceeaşi paritate.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Fie $a_n = [\sqrt{n}]$ şi $b_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$. Evident, $a_1 = b_1 = 1$. Apoi $a_{n+1} = a_n$ dacă $n+1$ nu este pătrat perfect şi $a_{n+1} = a_n + 1$ în caz contrar. Aşadar paritatea termenilor şirul (a_n) se schimbă atunci când rangul este pătrat perfect.
Deoarece $\left[\frac{n}{k}\right]$ reprezintă câtul împărţirii lui n la k, putem observa că, pentru orice $k \in \overline{1, n+1}$, $\left[\frac{n+1}{k}\right] - \left[\frac{n}{k}\right]$ este fie 0, dacă $k \nmid n+1$, fie 1 dacă $k \mid n+1$. Prin urmare $b_{n+1} - b_n = \sigma(n+1)$ adică numărul divizorilor lui $n+1$. Acesta este impar dacă şi numai dacă $n+1$ este pătrat perfect, prin urmare paritatea termenilor şirului (b_n) se schimbă atunci când rangul este pătrat perfect, adică simultan cu (a_n). Prin urmare, a_n şi b_n au, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aceeaşi paritate.

OBJ.60. Fie O un punct mobil în interiorul triunghiului ABC, $OA \cap BC = \{A'\}$ (analog B', C'), $OA \cap B'C' = \{A''\}$ (analog B'', C''). Determinaţi minimul produsului $\frac{AA''}{OA''} \cdot \frac{BB''}{OB''} \cdot \frac{CC''}{OC''}$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Demonstrăm mai întâi că punctele A' şi A'' sunt conjugate armonic în raport cu A şi O, adică $\frac{AA''}{OA''} = \frac{AA'}{OA'}$. Avem $\frac{AA''}{OA''} = \frac{AA'}{OA'} \Leftrightarrow \frac{d(A, B'C')}{d(O, B'C')} = \frac{d(A, BC)}{d(O, BC)} \Leftrightarrow \frac{S_{AB'C'}}{S_{OB'C'}} = \frac{S_{ABC}}{S_{OBC}} \Leftrightarrow \frac{S_{OB'C'}}{S_{OBC}} = \frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} \Leftrightarrow \frac{OB' \cdot OC'}{OB \cdot OC} = \frac{AB' \cdot AC'}{AB \cdot AC}$, relaţie care se obţine aplicând teorema lui *Menelaus* în $\Delta\, OB'C$ cu transversala $A - C' - B$ şi în $\Delta\, OC'B$ cu transversala $A - B' - C$ şi înmulţind relaţiile obţinute.
Conform celor demonstrate mai sus, $\frac{AA''}{OA''} \cdot \frac{BB''}{OB''} \cdot \frac{CC''}{OC''} = \frac{AA'}{OA'} \cdot \frac{BB'}{OB'} \cdot \frac{CC'}{OC'} \overset{\text{not}}{=} E$. Fie $\frac{BA'}{CA'} = x$, $\frac{CB'}{AB'} = y$, $\frac{AC'}{BC'} = z$, cu $x, y, z > 0$ şi $xyz = 1$ (teorema lui *Ceva*). Folosindu-ne de relaţia lui *van Aubel*, avem $E = \left(1 + z + \frac{1}{y}\right)\left(1 + x + \frac{1}{z}\right)\left(1 + y + \frac{1}{x}\right) \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{z}{y}} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{x}{z}} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 27$, deci $\min E = 27$, minimul realizându-se pentru $x = y = z = 1$, adică pentru $O = G$.

RMT 2/2015

OBJ.60. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătaţi că $\frac{a^2}{b^3 + c^3} + \frac{b^2}{c^3 + a^3} + \frac{c^2}{a^3 + b^3} \geq \frac{3(a + b + c)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$.

Marian Cucoaneş

Soluţie: Amplificăm fracţiile cu a^2, b^2, c^2 şi aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz: $\frac{a^4}{a^2b^3+a^2c^3} + \frac{b^4}{b^2c^3+b^2a^3} + \frac{c^4}{c^2a^3+c^2b^3} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2} \overset{?}{\geq} \frac{3(a+b+c)}{2(a^2+b^2+c^2)}$. Este suficient să demonstrăm că $2(a^2+b^2+c^2)^3 \geq 3(a+b+c)(a^3b^2+a^3c^2+b^3a^2+b^3c^2+c^3a^2+c^3b^2)$. Efectuând calculele şi folosind notaţia $[a, b, c] = \sum_{sim} x^a y^b z^c$, ajungem la $[6, 0, 0] + 3[4, 2, 0] + 2[2, 2, 2] \geq 3[3, 3, 0] + 3[3, 2, 1]$. Această inegalitate rezultă din adunarea inegalităţilor:

$[6,0,0]+[2,2,2]\geq 2[4,2,0]$ (inegalitatea lui Schur scrisă pentru a^2,b^2,c^2),
$[4,1,1]+[2,2,2]\geq 2[3,2,1]$ (inegalitatea lui Schur scrisă pentru a,b,c şi înmulţită apoi cu abc), $[4,2,0]\geq[4,1,1]$ (Muirhead), $[4,2,0]\geq[3,2,1]$ (Muirhead) şi $3[4,2,0]\geq 3[3,3,0]$ (Muirhead). Egalitatea are loc dacă $a=b=c$.

OBJ.61. Dacă $x,y,z\geq 0$ şi $x+y+z=3$, arătaţi că $x^2+y^2+z^2+xyz+2\geq 2(xy+yz+zx)$.

Marin Chirciu

Soluţie: Omogenizăm, adică rescriem ecuaţia echivalent:
$\dfrac{(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)}{3}+xyz+2\left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^3\geq 2\cdot\dfrac{(xy+yz+zx)(x+y+z)}{3}$. Efectuând calculele, ajungem la $11(x^3+y^3+z^3)\geq 3(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+15xyz$, inegalitate care rezultă din inegalităţile $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$ (şi analoagele) şi $x^3+y^3+z^3\geq 3xyz$ (medii). Alternativ, se putea folosi inegalitatea lui *Muirhead*. Egalitate avem dacă $x=y=z=1$.
Remarcă (Titu Zvonaru): În mod asemănător se poate demonstra următoarea inegalitate mai tare: dacă $x,y,z\geq 0$ şi $x+y+z=3$, atunci $x^2+y^2+z^2+xyz\geq 4$. După omogenizare se ajunge la $5(x^3+y^3+z^3)+3xyz\geq 3(x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2)$ care rezultă prin adunarea inegalităţilor: $x^3+y^3+z^3+3xyz\geq x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2$ (inegalitatea lui Schur) cu $x^3+y^3\geq x^2y+xy^2$ (şi analoagele).
Inegalitatea de mai sus este mai tare decât cea din enunţ pentru că $x+y+z=3$ implică $xy+yz+zx\leq 3$, deci $x^2+y^2+z^2+xyz+2\geq 6\geq 2(xy+yz+zx)$.

OBJ.62. Demonstraţi că dacă $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n>0$, atunci

$$\sqrt{\frac{a_1}{1}}+\sqrt{\frac{a_2}{2}}+\ldots+\sqrt{\frac{a_n}{n}}\geq\sqrt{a_1+\frac{3}{2}a_2+\frac{4}{3}a_3+\ldots+\frac{n+1}{n}a_n}.$$

Titu Zvonaru şi Neculai Stanciu

Soluţie: Vom demonstra afirmaţia prin inducţie. Pentru $n=2$, $\sqrt{a_1}+\sqrt{\dfrac{a_2}{2}}\geq\sqrt{a_1+\dfrac{3}{2}a_2}$ revine prin ridicare la pătrat la $\sqrt{2a_1a_2}\geq a_2$, adică la $2a_1\geq a_2$, adevărat, deoarece $a_1\geq a_2$. Presupunând afirmaţia adevărată pentru n numere $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n>0$, o vom demonstra pentru $n+1$ numere, $a_1\geq a_2\geq\ldots\geq a_n\geq a_{n+1}>0$. Este suficient să demonstrăm că $\sqrt{a_1+\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{4}{3}a_3+\ldots+\dfrac{n+1}{n}a_n}+\sqrt{\dfrac{a_{n+1}}{n+1}}\geq\sqrt{a_1+\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{4}{3}a_3+\ldots+\dfrac{n+1}{n}a_n+\dfrac{n+2}{n+1}a_{n+1}}$.
După ridicare la pătrat şi reducerea termenilor asemenea, ajungem la
$2\sqrt{\left(a_1+\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{4}{3}a_3+\ldots+\dfrac{n+1}{n}a_n\right)\cdot\dfrac{a_{n+1}}{n+1}}\geq a_{n+1}$, apoi la
$2\sqrt{a_1+\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{4}{3}a_3+\ldots+\dfrac{n+1}{n}a_n}\geq\sqrt{(n+1)a_{n+1}}$.
Deoarece $a_1+\dfrac{3}{2}a_2+\dfrac{4}{3}a_3+\ldots+\dfrac{n+1}{n}a_n\geq\left(1+\dfrac{3}{2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n}\right)a_{n+1}$, este suficient să demonstrăm că $4\left(1+\dfrac{3}{2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n}\right)\geq n+1$, adevărat deoarece $4\left(1+\dfrac{3}{2}+\ldots+\dfrac{n+1}{n}\right)>4n>n+1$.

OBJ.63. Prelungirea medianei AA' a triunghiului ABC, $A'\in BC$, intersectează a doua oară cercul circumscris în punctul D. Arătaţi că $AB\cdot AC+DB\cdot DC\leq AD^2$. În ce caz avem egalitate?

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Din puterea punctului A' faţă de cerc rezultă că $A'D = \dfrac{a^2}{4m_a}$. Din teorema medianei, $A'D^2 = \dfrac{2DB^2 + 2DC^2 - a^2}{4}$, deci $AD^2 = (m_a + A'D)^2 = m_a^2 + 2m_a \cdot A'D + A'D^2$. Inegalitatea din enunţ se scrie echivalent $AB \cdot AC + DB \cdot DC \le \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + 2m_a \cdot \dfrac{a^2}{4m_a} + \dfrac{2DB^2 + 2DC^2 - a^2}{4}$ adică $2bc + 2DB \cdot DC \le b^2 + c^2 + DB^2 + DC^2$, adică $(b-c)^2 + (DB - DC)^2 \ge 0$, ceea ce este evident. Egalitate avem dacă $AB = AC$.
Remarcă: A se vedea şi nota „O extindere a problemei **OBJ.63**" din prezentul număr.

OBJ.64. Arătaţi că oricare ar fi $x, y, z \in (0, \infty)$, dacă $x + y + z = 1$ şi $x \ge y \ge z$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{y^2z}{x+yz} + \frac{z^2x}{y+zx} + \frac{x^2y}{z+xy} \ge \frac{yz^2}{x+yz} + \frac{zx^2}{y+zx} + \frac{xy^2}{z+xy}.$$

Vasile Peiţa

Soluţie: Avem $x + yz = x(x+y+z) + yz = (x+y)(x+z)$ şi analoagele, deci inegalitatea se scrie echivalent $\dfrac{y^2z}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{z^2x}{(y+x)(y+z)} + \dfrac{x^2y}{(z+x)(z+y)} \ge \dfrac{yz^2}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{zx^2}{(y+x)(y+z)} + \dfrac{xy^2}{(z+x)(z+y)}$, adică $\dfrac{y^2z - yz^2}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{z^2x - zx^2}{(y+x)(y+z)} + \dfrac{x^2y - xy^2}{(z+x)(z+y)} \ge 0$. Eliminând numitorii, ajungem la $yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(x^2 - y^2) \ge 0$, adică la $yz(y^2 - z^2) + xy(x^2 - y^2) \ge xz(x^2 - z^2)$. Scriind $x^2 - z^2 = (x^2 - y^2) + (y^2 - z^2)$, inegalitatea revine la $(yz - xz)(y^2 - z^2) + (xy - xz)(x^2 - y^2) \ge 0$, sau $(x-y)(y-z)(x^2 + xy - yz - z^2) \ge 0$, deci $(x-y)(y-z)(x-z)(x+y+z) \ge 0$, care este evidentă. Egalitate avem dacă cel puţin două dintre variabile sunt egale.

OBJ.65. Fie ABC un triunghi isoscel, cu $AB = AC$. Dacă punctele $D \in (BC)$ şi $P \in (AD)$ sunt astfel încât $\sphericalangle BPD \equiv \sphericalangle BAC$ şi $m(\sphericalangle DPC) = \dfrac{1}{2} m(\sphericalangle BAC)$, demonstraţi că $BD = 2CD$.

Bogdan Ioniţă şi Titu Zvonaru

Soluţie: Să remarcăm mai întâi că $m(\sphericalangle PAC) < m(\sphericalangle DPC) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle A)$, deci $m(\sphericalangle PAB) > \frac{1}{2} m(\sphericalangle A)$. De asemenea, $m(\sphericalangle ABP) = m(\sphericalangle DPB) - m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle A) - m(\sphericalangle BAP) = m(\sphericalangle CAP) < \frac{1}{2} m(\sphericalangle A) < m(\sphericalangle BAP)$. Rezultă atunci din triunghiul ABP că $AP < BP$.
Construim $X \in (BP)$ astfel ca $BX = AP$. Atunci $\Delta\, BAX \equiv \Delta\, ACP$ (LUL). Rezultă că $m(\sphericalangle AXP) = m(\sphericalangle ABX) + m(\sphericalangle BAX) = m(\sphericalangle PAC) + m(\sphericalangle ACP) = m(\sphericalangle DPC) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle A)$. Dar şi $m(\sphericalangle PAX) = \frac{1}{2} m(\sphericalangle A)$, deci triunghiul PAX este isoscel, cu $PX = PA = BX$.
Deducem că $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{\mathscr{A}_{ABD}}{\mathscr{A}_{ACD}} = \dfrac{\sin(\sphericalangle BAD)}{\sin(\sphericalangle CAD)} = \dfrac{\sin(\sphericalangle BAP)}{\sin(\sphericalangle ABP)} = \dfrac{BP}{AP} = 2.$

OBJ.66. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $11^x - 2^x = y^2$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: $x = 0 \Rightarrow y = 0$ şi $x = 1 \Rightarrow y = 3$; găsim soluţiile $(0,0)$ şi $(1,3)$. Dacă $x \ge 2$, atunci $4 \mid 2^x$ şi $11^x \equiv (-1)^x \pmod 4$ implică x par (y este impar, deci $y^2 \equiv 1 \pmod 4$). Dacă $x = 2k$, avem $2^{2k} = (11^k - y)(11^k + y)$, deci $11^k - y = 2^u$, $11^k + y = 2^v$, cu $u, v \in \mathbb{N}$, $u \le v$, $u + v = 2k$. Prin adunare, $2 \cdot 11^x = 2^u + 2^v$, deci fie $u = v = 0$ (adică $x = y = 0$), fie $u = 1$ şi $v = 2k - 1$. Atunci $11^k = 1 + 2^{2k-2} < 1 + 4^k < 11^k$, absurd, deci în acest caz nu mai obţinem soluţii.

OBJ.67. Fie $A' \in (BC)$ piciorul bisectoarei din A a triunghiului ABC, iar D, E astfel încât $B \in (AD)$, $BD = AC$, respectiv $C \in (BE)$, $CE = BA'$. Dacă $DA' \cap AE = \{F\}$, arătaţi că $BF \parallel DE$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Fie $\{M\} = AA' \cap DE$. Din teorema bisectoarei, $\dfrac{A'C}{A'B} = \dfrac{AC}{AB}$, adică $\dfrac{CA + BA}{BA} = \dfrac{A'B + A'C}{A'B} \Leftrightarrow \dfrac{BD + BA}{BA} = \dfrac{CE + A'C}{A'B} \Leftrightarrow \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{A'E}{A'B}$. Din teorema lui Menelaus în triunghiul BDE rezultă $\dfrac{DM}{ME} = \dfrac{DA}{BA} \cdot \dfrac{A'B}{A'E} = 1$. Din teorema lui Ceva, $\dfrac{AB}{BD} \cdot \dfrac{DM}{EM} \cdot \dfrac{EF}{FA}$, deci, cum $DM = ME$, avem $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AF}{EF}$. Din reciproca teoremei lui Thales rezultă concluzia.

OBJ.68. Dacă $a, b, c \geq 0$ sunt astfel încât $a + b + c = 1$ şi $n \geq 5$, arătaţi că

$$n(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(n - 3)(a^3 + b^3 + c^3) + 1.$$

Când are loc egalitatea?

Marin Chirciu

Soluţie: Omogenizăm inegalitatea, adică o scriem echivalent $n(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \leq 3(n-3)(a^3+b^3+c^3)+(a+b+c)^3$. Efectuând calculele, ajungem la $(2n-8)(a^3+b^3+c^3)+6abc \geq (n-3)(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$, inegalitate care rezultă din adunarea inegalităţilor $(n-5)(2a^3+2b^2+2c^3) \geq (n-5)(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$ şi $2(a^3+b^3+c^3+3abc) \geq 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$. Prima inegalitate se scrie $(n - 5)[(a + b)(a - b)^2 + (b + c)(b - c)^2 + (c + a)(c - a)^2] \geq 0$, iar a doua este inegalitatea lui Schur. În prima avem egalitate dacă $n = 5$ sau dacă $a = b = c$, în cea de-a doua dacă $a = b = c$ sau $a = b,\ c = 0$ sau $b = c,\ a = 0$ sau $c = a,\ b = 0$. În concluzie, dacă $n = 5$, atunci avem egalitate pentru cazurile $a = b = c = \dfrac{1}{3}$; $a = b = \dfrac{1}{2}$, $c = 0$; $b = c = \dfrac{1}{2}$, $a = 0$ şi $c = a = \dfrac{1}{2}$, $b = 0$. Dacă $n > 5$, atunci avem egalitate numai dacă $a = b = c = \dfrac{1}{3}$.

OBJ.69. a) Demonstraţi că pentru orice numere naturale nenule a şi b există şi sunt unice numerele $x, y \in \mathbb{N}^*$, prime între ele, astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$(ax + by)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2).$$

b) Fie n un număr natural care nu este pătrat perfect şi care are cel puţin şase divizori naturali. Arătaţi că putem alege patru dintre ei, fie aceştia $x < y < z < t$, astfel încât cel mult unul dintre ei să nu fie divizor propriu, iar numărul $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2)(x^2 + z^2)(y^2 + t^2)$ să fie pătrat perfect.

Lucian Petrescu

Soluţie: **a)** Relaţia este echivalentă cu $(ay - bx)^2 = 0$, deci cu $ay = bx$. Dacă $d = (a, b)$, $a = da'$, $b = db'$, trebuie ca $a'y = b'x$. Cum $(a', b') = 1$, rezultă că $a' \mid x$. Dacă $x = ka'$, atunci $y = kb'$ şi, cum $(x, y) = 1$, rezultă $k = 1$. Aşadar numerele $x = \dfrac{a}{d}$, $y = \dfrac{b}{d}$ există şi sunt unice.

b) Dacă a şi b sunt numere naturale nenule, iar $d = (a, b)$, $m = [a, b]$, cum $ab = dm$, din punctul anterior rezultă că $(ad + bm)^2 = (a^2 + m^2)(b^2 + d^2)$ şi $(am + bd)^2 = (a^2 + d^2)(b^2 + m^2)$. Înmulţind cele două egalităţi rezultă $(a^2 + d^2)(b^2 + m^2)(d^2 + b^2)(a^2 + m^2) = [(ad + bm)(am + bd)]^2$, adică un pătrat perfect. Aşadar, în baza egalităţii anterioare, pentru numărul natural n care are cel puţin şase divizori, putem alege $y = a$, $z = b$ doi divizori proprii astfel ca $ab \neq n$, apoi $x = d = (a, b)$ şi $t = m = [a, b]$ şi concluzia este astfel demonstrată. Dacă $d = 1$, atunci m este divizor propriu, deci cel mult unul dintre numerele d, a, b, m nu este divizor propriu al lui n.

OBJ.70. Arătaţi că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există numerele $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $3^a + 3^b$ să fie divizibil cu 7^n.

Gheorghe Stoica

Soluţia 1: Avem $3^3 \equiv -1 \pmod 7$. Vom demonstra prin inducţie că $3^{3\cdot 7^{n-1}} \equiv -1 \pmod{7^n}$. Într-adevăr, dacă $u = 3 \cdot 7^{n-1}$, atunci $3^{7u}+1 = (3^u+1)(3^{6u}-3^{5u}+3^{4u}-3^{3u}+3^{2u}-3^u+1)$. Dacă $3^u \equiv -1 \pmod{7^n}$, atunci $7 \mid 3^{6u}-3^{5u}+3^{4u}-3^{3u}+3^{2u}-3^u+1$ şi astfel $3^{7u} \equiv -1 \pmod{7^{n+1}}$. Prin urmare, putem alege $b \in \mathbb{N}^*$ arbitrar şi $a = b + 3 \cdot 7^{n-1}$.
Soluţia 2: Din *Lifting the Exponent Lemma* rezultă că, dacă m este impar, $v_7(27^m + 1^m) = v_7(m) + v_7(28)$, deci putem alege $m = 7^{n-1}$ şi atunci $v_7(3^{3\cdot 7^{n-1}} + 1) = n$. Putem alege $a, b \in \mathbb{N}^*$ cu $a - b = 3 \cdot 7^{n-1}$.

OBJ.71. Doi copii, Ana şi Bogdan, joacă următorul joc. În colţul din stânga-jos al unei table pătrate 2015×2015 este plasat un jeton. Cei doi copii mută alternativ jetonul, fie cu două pătrăţele în sus, fie cu trei pătrăţele către dreapta. Ana mută prima. Cine nu mai poate muta, pierde. Care din cei doi copii are strategie câştigătoare?

Andrei Eckstein

Soluţie: Numerotăm liniile şi coloanele pornind din stânga jos. Jocul se dispută numai pe liniile impare şi pe coloanele cu număr de forma $3k + 1$. Dacă ştergem celelalte linii şi coloane, jocul se dispută pe o tablă cu 1008 linii şi 672 de coloane, iar jucătorii mută fie cu un pătrăţel în sus, fie cu unul la dreapta. Colorăm tablă redusă ca pe o tablă de şah, cu colţul din dreapta-sus negru. Astfel, vor fi negre toate pătrăţelele care au suma dintre numărul liniei şi numărul coloanei pară, iar celelalte vor fi albe. În particular, pătrăţelul iniţial, având această sumă egală cu $1 + 1$, deci pară, este negru. Astfel, Ana va urma mereu la mutare cu jetonul aflat pe un pătrăţel negru şi va lăsa jetonul pe un pătrăţel alb. Singura poziţie în care jocul se termină este cu jetonul în colţul din dreapta-sus. Acesta fiind negru, la mutare va fi Ana, deci Bogdan va câştiga indiferent cum mută.
Altfel: Pe tabla redusă, fiecare mutare creşte suma coordonatelor cu 1. Iniţial suma este 2, la final ea este 1680, deci până când jocul se termină se vor face exact 1678 de mutări, deci ultimul care mută este Bogdan.

OBJ.72. Fie a, b, c, d numere reale astfel încât $a, b, c \geq 1 \geq d \geq 0$ şi $a + b + c + d = 4$.
a) Arătaţi că $5 \leq (a + b)(c + d) + ab + cd \leq 6$.
b) Arătaţi că $2 \leq ab(c + d) + cd(a + b) \leq 4$.

Leonard Giugiuc, Diana Trailescu, Siva Nagi Reddy Modugula

Soluţie: Mai întâi vom demonstra inegalităţile mai simple, adică cele din dreapta. Acestea au loc pentru orice $a, b, c, d \geq 0$ cu $a + b + c + d = 4$.
• Ştim că $3(a + b + c + d)^2 - 8[(a + b)(c + d) + ab + cd] = (a - b)^2 + (a - c)^2 + (a - d)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 + (c - d)^2 \geq 0$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c = d = 1$. Atunci $48 - 8[(a + b)(c + d) + ab + cd] \geq 0$ implică $(a + b)(c + d) + ab + cd \leq 6$.
• Avem $6(abc + abd + acd + bcd) \overset{(*)}{\leq} (ab + ac + ad + bc + bd + cd)(a + b + c + d) \leq 6 \cdot 4$, de unde $ab(c + d) + cd(a + b) \leq 4$. Inegalitatea $(*)$ este echivalentă cu $3(abc + abd + acd + bcd) \leq (a^2b + a^2c + a^2d + b^2a + b^2c + b^2d + c^2a + c^2b + c^2d + d^2a + d^2b + d^2c)$ şi rezultă din adunarea inegalităţilor $3abc \leq a^2b + b^2c + c^2a$, $3abd \leq ab^2 + bd^2 + da^2$, $3acd \leq ad^2 + dc^2 + ca^2$ şi $3bcd \leq bc^2 + cd^2 + db^2$ care sunt evidente din inegalitatea mediilor. Alternativ, inegalitatea $(*)$ este consecinţă directă a inegalităţii lui Muirhead: ea se scrie $[1, 1, 1, 0] \leq [2, 1, 0, 0]$. Egalitate avem pentru $a = b = c = d = 1$.
• Notăm expresia $E(a, b, c, d) = (a + b)(c + d) + ab + cd$. Este evident că $E(a, b, c, d) \geq E(a, b, c + d, 0)$. Notând $a = x$, $b = y$, $c + d = z$, este suficient să arătăm că dacă $x, y, z \geq 1$ au suma 4, atunci $E(x, y, z, 0) = xy + yz + zx \geq 5$. Ori $(x - 1)(y - 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x + y - 1$, de unde

$xy + yz + zx \geq 2(x+y+z) - 3 = 5$. Egalitate avem dacă două dintre numerele x, y, z sunt egale cu 1, iar cel de-al treilea este 2 şi, în plus, $E(a,b,c,d) = E(a,b,c+d,0)$ adică $d = 0$ şi $(a,b,c) \in \{(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)\}$.

• Notăm expresia $F(a,b,c,d) = ab(c+d)+cd(a+b)$. Este evident că $F(a,b,c,d) \geq F(a,b,c+d,0)$. Notând $a = x$, $b = y$, $c + d = z$, este suficient să arătăm că dacă $x, y, z \geq 1$ au suma 4, atunci $F(x,y,z,0) = xyz \geq 2$. Ori $(x-1)(y-1)(z-1) \geq 0 \Leftrightarrow xyz \geq xy + yz + zx - x - y - z + 1 \geq 5 - 4 + 1 = 2$, cu egalitate în aceleaşi condiţii ca în inegalitatea precedentă.

OBJ.73. Fie ABC un triunghi oarecare. Spre exteriorul triunghiului construim triunghiul echilateral $\Delta\, BCA_1$ şi triunghiurile $\Delta\, ABC_A \sim \Delta\, ACB_A$ având $m(\sphericalangle\, BAC_A) = m(\sphericalangle\, CAB_A) = 30°$. Demonstraţi că dreptele AA_1 şi B_AC_A sunt perpendiculare.

Petru Braica

Soluţia 1: Construim $C_AP \perp AB$, $B_AQ \perp AC$, $AS \perp B_AC_A$, $P \in AB$, $Q \in AC$, $S \in B_AC_A$. Rezultă că patrulaterele $ASPC_A$ şi $ASQB_A$ sunt inscriptibile. Rezultă că $m(\sphericalangle PSC_A) = m(\sphericalangle QSB_A) = 30°$. Ducem $BT_1 \parallel PS$, $T_1 \in (AS$. Atunci $\dfrac{AS}{AT_1} = \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AC_A}{AB} \cdot \cos 30°$. Analog, dacă ducem $CT_2 \parallel QS$, $T_2 \in (AS$, vom obţine $\dfrac{AS}{AT_2} = \dfrac{AB_A}{AC} \cdot \cos 30° = \dfrac{AC_A}{AB} \cdot \cos 30°$, de unde $T_1 = T_2 \overset{\text{not}}{=} T$. Avem $m(\sphericalangle BTA) = m(\sphericalangle PSA) = 30° + 90° = 120°$ şi, analog, $m(\sphericalangle CTA) = 120°$, deci T este punctul lui Torricelli al triunghiului ABC. Se ştie că A, T, A_1 sunt coliniare, deci A, S, T, A_1 sunt coliniare, deci $AA_1 \perp B_AC_A$.

Soluţia 2: Vom demonstra mai întâi afirmaţia în cazul în care $AB_A = CB_A$ şi $AC_A = BC_A$. Se ştie că dacă în exteriorul unui triunghi ABC construim triunghiurile echilaterale BCA_1, CAB_1, ABC_1, atunci dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în punctul lui Torricelli. De asemenea, cercurile circumscrise celor trei triunghiuri echilaterale se intersectează în T. Atunci AA_1 este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC_1 şi ACB_1, deci este perpendiculară pe linia centrelor, B_AC_A. Revenind la cazul general, dacă notăm cu B_0 şi C_0 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale construite pe laturile $[AC]$, respectiv $[AB]$, atunci $B_0 \in (AB_A$ şi $C_0 \in (AC_A$. În plus, din asemănări, avem $\dfrac{AB_A}{AC_A} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB_0}{AC_0}$, deci $B_AC_A \parallel B_0C_0$, ori despre B_0C_0 am arătat deja că este perpendiculară pe AA_1.

RMT 1/2016

OBJ.74. Demonstraţi că dacă $x, y, z > 0$, atunci
$$\frac{yz(y+z)}{y(z+x)^2 + z(x+y)^2} + \frac{zx(z+x)}{z(x+y)^2 + x(y+z)^2} + \frac{xy(x+y)}{x(y+z)^2 + y(z+x)^2} \geq \frac{3}{4}.$$

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Folosind că $x(y+z)^2 \geq x \cdot 4yz$ ($\Leftrightarrow x(y-z)^2 \geq 0$) şi analoagele, avem că
$$\frac{yz(y+z)}{y(z+x)^2 + z(x+y)^2} = \frac{yz(y+z)}{x^2(y+z) + yz(y+z) + 4xyz} \geq \frac{yz(y+z)}{x^2(y+z) + yz(y+z) + x(y+z)^2} =$$
$\dfrac{yz}{x^2 + yz + x(y+z)} = \dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}$ şi analoagele. Eliminând numitorii, ajungem la a arăta că $4\big(yz(y+z)+zx(z+x)+xy(x+y)\big) \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$, adică $x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y \geq 6xyz$ care este evidentă din inegalitatea mediilor aplicată pentru cele 6 numere din membrul stâng sau rezultă din $x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 \geq 0$.

OBJ.75. Arătaţi că pentru orice $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 1$, are loc inegalitatea
$$\frac{a}{a^2 + 3b} + \frac{b}{b^2 + 3c} + \frac{c}{c^2 + 3a} \geq \frac{9}{10}.$$

Vasile Peiţa

Soluţie: Avem $\dfrac{a}{a^2+3b}+\dfrac{b}{b^2+3c}+\dfrac{c}{c^2+3a}=\dfrac{a^2}{a^3+3ab}+\dfrac{b^2}{b^3+3bc}+\dfrac{c^2}{c^3+3ca}\overset{CBS}{\geq}$
$\dfrac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+3(ab+bc+ca)}$. Ţinând cont de identitatea
$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$,
este suficient să demonstrăm că $\dfrac{(a+b+c)^2}{3abc+(a+b+c)^2}\geq\dfrac{9}{10}$, adică $\dfrac{1}{3abc+1}\geq\dfrac{9}{10}$, care revine la $abc\leq\dfrac{1}{27}$. Ultima inegalitate rezultă din inegalitatea mediilor: $abc\leq\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$.
Egalitate avem dacă $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

OBJ.76. Arătaţi că numărul $2^{2016}+3^{2016}$ nu este pătrat perfect şi nici cub perfect.

Ionel Tudor

Soluţie: 2^{2016} are ultima cifră 6, iar 3^{2016} are ultima cifră 1, prin urmare $2^{2016}+3^{2016}$ are ultima cifră 7, deci nu poate fi pătrat perfect.
Dacă $2^{2016}+3^{2016}=n^3$, atunci $(2^{672},3^{672},n)$ ar fi o soluţie nebanală a ecuaţiei $x^3+y^3=z^3$, însă potrivit Marii teoreme a lui Fermat, această ecuaţie nu are soluţii nebanale.
Altfel: $2^{2016}=(7+1)^{672}=M_7+1$, iar $3^{2016}=(28-1)^{672}=M_7+1$, prin urmare $2^{2016}+3^{2016}\equiv 2$ (mod 7). Însă un cub perfect poate da numai unul din resturile 0, 1 şi 6 la împărţirea cu 7 (se arată fie calculând $(7k+r)^3$ pentru fiecare $r=\overline{0,6}$, fie invocând mica teoremă a lui Fermat).

OBJ.77. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Arătaţi că oricare ar fi numerele impare pozitive $a_1,a_2,\ldots,a_n$, numărul $\dfrac{a_1}{1}+\dfrac{a_2}{2}+\ldots+\dfrac{a_n}{n}$ nu este întreg.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Ne uităm la exponentul lui 2 din descompunerea în factori a numerelor $2,3,\ldots,n$. Ne uităm la exponentul maxim, m. Există un singur număr care are acest exponent maxim. Într-adevăr, dacă printre numere se află atât $2^m(2k_1+1)$ cât şi $2^m(2k_2+1)$, cu $k_1<k_2$, atunci printre numere se află şi $2^m(2k_1+2)=2^{m+1}(k_1+1)$ care are exponentul lui 2 cel puţin $m+1$, contradicţie cu alegerea lui m. Când în suma din enunţ, aducem fracţiile la acelaşi numitor, toate fracţiile se vor amplifica cu numere pare, mai puţin cea în care apare singurul număr divizibil cu 2^m. Astfel, după aducerea la acelaşi numitor, numărătorul fracţiei obţinute va fi impar, iar numitorul va fi par, prin urmare suma din enunţ nu va fi un număr natural.

OBJ.78. Fie ABC un triunghi oarecare. Notăm cu P şi Q proiecţiile mijlocului M al laturii $[BC]$, pe laturile $[AB]$ şi $[AC]$, iar cu N punctul de intersecţie al segmentului $[PQ]$ cu mediatoarea laturii $[BC]$. Arătaţi că dreapta MN este o simediană a triunghiului MPQ.

Titu Zvonaru şi Mihai Miculiţa

Soluţie: Din triunghiurile dreptunghice BMP şi CMQ obţinem că $MP=BM\sin B$ şi $MQ=MC\sin C$, deci $\dfrac{MP}{MQ}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$.
Pe de altă parte, $\sphericalangle PMN\equiv\sphericalangle B$ (complementare cu $\sphericalangle PMB$) şi, analog, $\sphericalangle QMN\equiv\sphericalangle C$, de unde rezultă că $\dfrac{NP}{NQ}=\dfrac{S_{MNP}}{S_{MNQ}}=\dfrac{MP\sin\widehat{PMN}}{MQ\sin\widehat{QMN}}=\dfrac{MP\sin B}{MQ\sin C}=\left(\dfrac{MP}{MQ}\right)^2$, deci $[MN]$ este simediană în triunghiul MPQ.

OBJ.79. Fie P un punct în interiorul triunghiului scalen ABC. Cevienele (AA_1), (BB_1), (CC_1) sunt concurente în P. Notăm cu $\{A_2\}=B_1C_1\cap BC$, $\{B_2\}=A_1C_1\cap AC$ şi cu $\{C_2\}=A_1B_1\cap AB$, iar A_3, B_3 şi C_3 sunt mijloacele (A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2). Demonstraţi că punctele A_3, B_3, C_3 sunt coliniare.

Petru Braica

Soluţie: Să arătăm mai întâi coliniaritatea punctelor A_2, B_2, C_2, apoi să observăm că punctele A_3, B_3, C_3 determină dreapta Newton-Gauss a patrulaterului complet $A_1B_1A_2B_2C_1C_2$.
Scriind teorema lui Menelaos pentru triunghiul ABC tăiat de transversala $A_2 - B_1 - C_1$ obţinem că $\frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{AB_1}{B_1C} = 1$, de unde $\frac{A_2C}{A_2B} = \frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{B_1A}$. Obţinem relaţii analoage pentru $\frac{B_2A}{B_2C}$ şi $\frac{C_2B}{C_2A}$. Înmulţindu-le, obţinem că $\frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} = \left(\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{A_1B}{CA_1}\right)^2 = 1$ din teorema lui Ceva, deci, din reciproca teoremei lui Menelaos, rezultă coliniaritatea punctelor A_2, B_2, C_2. Aşadar A_3, B_3, C_3 sunt mijloacele diagonalelor patrulaterului complet $A_2C_1A_1C_2$, de unde concluzia.

OBJ.80. Doi copii, Ana şi Bogdan, joacă următorul joc. În colţul din stânga-jos al unei table 2015×2016 este plasat un jeton. Cei doi copii mută alternativ jetonul, fie în sus, fie către dreapta, cu două sau cu trei pătrăţele. (Aşadar sunt posibile 4 tipuri de mutări.) Ana mută prima. Cine nu mai poate muta, pierde. Care din cei doi copii are strategie câştigătoare?

Andrei Eckstein

Soluţie: Numerotăm liniile de la 1 la 2015 şi coloanele de la 1 la 2016 pornind din colţul din dreapta sus (liniile le numerotăm de sus în jos, coloanele de la dreapta spre stânga). Vom spune că ne aflăm în poziţia (x, y) dacă urmăm la mutare, iar jetonul se află pe linia x, coloana y. Orice mutare constă în micşorarea cu 2 sau 3 a uneia dintre cele două coordonate. Mulţimea poziţiilor finale (a poziţiilor din care nu mai există mutare, adică poziţii în care cel care urmează la mutare, a pierdut) este $\mathscr{F} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.
Căutăm o mulţime $\mathscr{L}$ („a poziţiilor pierzătoare") cu următoarele proprietăţi:
1. $\mathscr{F} \subset \mathscr{L}$;
2. nu există nicio mutare a jetonului dintr-o poziţie din $\mathscr{L}$ într-o altă poziţie aflată tot în $\mathscr{L}$;
3. din orice poziţie care **nu** se află în $\mathscr{L}$, există (cel puţin) o mutare care să-l lase pe adversar într-o poziţie din $\mathscr{L}$.
Putem considera următoarea mulţime : $\mathscr{L} = \{(5i+1, 5j+1), (5i+1, 5j+2), (5i+1, 5j+1), (5i+2, 5j+2), (5i+3, 5j+3), (5i+3, 5j+4), (5i+4, 5j+3), (5i+4, 5j+4), (5i+5, 5j+5) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$. (Nu toate aceste poziţii „incap" pe tabla de joc.) Se verifică uşor că această mulţime are proprietăţile 1., 2., 3. de mai sus. Să mai observăm că poziţia iniţială, $(2015, 2016)$, nu este în $\mathscr{L}$, deci este câştigătoare. Strategia de câştig a primului jucător este de a-l lăsa mereu pe adversar într-o poziţie din $\mathscr{L}$. Prima sa mutare va fi cu 3 pătrăţele în sus. Astfel, Bogdan va urma mereu la mutare fiind într-o poziţie din $\mathscr{L}$, în vreme ce Ana va muta din poziţii care nu sunt în $\mathscr{L}$. (Cum toate poziţiile finale sunt în $\mathscr{L}$, Ana va avea mereu mutare, deci ea nu va pierde; cum jocul se termină neapărat pentru că suma coordonatelor scade mereu, Bogdan va fi cel care va pierde.)

Observaţii: Jocul de mai sus este de fapt o combinaţie a două jocuri de tip *Bachet*, unul pe orizontală şi altul pe verticală. La ambele jocuri se pot muta două sau trei pătrăţele, într-un singur sens, cu cel care nu mai poate muta pierzând. Jocul pe verticală se joacă pe o tablă 2015×1, iar cel pe orizontală pe o tablă 1×2016. La jocul pe orizontală, al doilea jucător are strategie câştigătoare: dacă primul jucător mută $k \in \{2, 3\}$ spre dreapta, al doilea jucător mută $5 - k \in \{2, 3\}$, astfel că după fiecare pereche de mutări jetonul va fi într-o poziţie $M_5 + 1$, deci primul jucător va fi cel care după 403 perechi de mutări se va afla la capătul tablei şi nu va mai putea muta.
În schimb, la jocul pe verticală, primul jucător are strategie de câştig: iniţial el mută 3 pătrăţele în sus, apoi el mută în funcţie de ce mută al doilea jucător: dacă al doilea jucător mută $k \in \{2, 3\}$

în sus, primul jucător mută $5-k \in \{2,3\}$, astfel că după 805 mutări, cea iniţială şi cele din 402 perechi de mutări, jetonul se va afla pe penultimul rând şi cel de-al doilea jucător nu va mai putea muta.
De aici se vede care trebuie să fie strategia primului jucător: el începe prin a muta 3 în sus, apoi răspunde la o mutare de k pătrăţele a adversarului printr-o mutare $5-k$ făcută în aceeaşi direcţie. Deoarece după efectuarea primei mutări, următoarele se fac în perechi, primul jucător va avea întotdeauna la dispoziţie o mutare răspuns, deci cel care rămâne fără mutare este cel de-al doilea jucător.

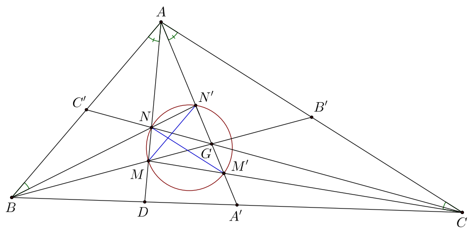
Vă propunem să stabiliţi jucătorul câştigător şi strategia acestuia dacă jocul se joacă pe o tablă $m \times n$.

RMT 2/2016

OBJ.81. Fie ABC un triunghi cu $AB \neq AC$, M şi N intersecţiile medianelor din B, respectiv C, cu simediana din A. Demonstraţi că unghiurile $\sphericalangle ABN$ şi $\sphericalangle ACM$ sunt congruente.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Fie B', C' mijloacele laturilor $[AC]$, respectiv $[AB]$, $\{M'\} = AG \cap CM$ şi $\{N'\} = AG \cap BN$. Atunci $\dfrac{MM'}{M'C} = \dfrac{\mathscr{A}_{[AMM']}}{\mathscr{A}_{[AM'C]}} = \dfrac{AM \cdot AM' \sin(\widehat{MAM'})}{AC \cdot AM' \sin(\widehat{M'AC})} = \dfrac{AM \cdot AG \sin(\widehat{MAG})}{2AB' \cdot AG \sin(\widehat{GAC})} = \dfrac{\mathscr{A}_{[AMG]}}{2\mathscr{A}_{[AGB']}} = \dfrac{MG}{2GB'} = \dfrac{MG}{BG}$.



Din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABM şi transversalei $G-N-C'$ rezultă $\dfrac{MG}{BG} = \dfrac{MN}{NA}$. De aici rezultă $NM' \parallel AC$. Analog, $MN' \parallel AB$. Cum mediana şi simediana sunt izogonale, avem $\sphericalangle NM'G \equiv \sphericalangle GAC \equiv \sphericalangle NAB \equiv \sphericalangle NMN'$. Deducem că patrulaterul $MM'N'N$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle ACM \equiv \sphericalangle NM'M \equiv \sphericalangle NN'M \equiv \sphericalangle ABN$.

OBJ.82. Demonstraţi că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $a+b+c=1$, atunci

$$\frac{a}{(1+bc)^3} + \frac{b}{(1+ca)^3} + \frac{c}{(1+ab)^3} \geq \left(\frac{9}{10}\right)^3.$$

Vasile Peiţa

Soluţie: Vom folosi inegalitatea lui *Radon*: dacă $m, n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n > 0$, atunci $\dfrac{x_1^{m+1}}{y_1^m} + \dfrac{x_2^{m+1}}{y_2^m} + \ldots + \dfrac{x_n^{m+1}}{y_n^m} \geq \dfrac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^{m+1}}{(y_1+y_2+\ldots+y_n)^m}$.
Avem $\dfrac{a}{(1+bc)^3} + \dfrac{b}{(1+ca)^3} + \dfrac{c}{(1+ab)^3} = \dfrac{a^4}{(a+abc)^3} + \dfrac{b^4}{(b+abc)^3} + \dfrac{c^4}{(c+abc)^3} \geq \dfrac{(a+b+c)^4}{(a+b+c+3abc)^3} \geq \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{9}\right)^3} = \left(\dfrac{9}{10}\right)^3$, ultima inegalitate rezultând din inegalitatea mediilor: $abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$. Egalitatea are loc pentru $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

În general, inegalitatea lui Radon rezulă din inegalitatea lui Hölder, însă pentru $m = 3$ ea se poate demonstra aplicând de două ori forma Bergström a inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-Schwarz:

$$\frac{x_1^4}{y_1^3} + \frac{x_2^4}{y_2^3} + \ldots + \frac{x_n^4}{y_n^3} = \frac{\left(\frac{x_1^2}{y_1}\right)^2}{y_1} + \frac{\left(\frac{x_2^2}{y_2}\right)^2}{y_2} + \ldots + \frac{\left(\frac{x_n^2}{y_n}\right)^2}{y_n} \overset{CBS}{\geq} \frac{\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} \overset{CBS}{\geq}$$

$$\frac{\left(\frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_1 + \ldots + y_n}\right)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^4}{(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^3}.$$

OBJ.83. Numim repetare a unui număr natural nenul $A = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ numărul $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n a_1 a_2 \ldots a_n}$. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale a căror repetare este un pătrat perfect.

* * *

Soluţie: Dacă A este un număr de n cifre, repetarea sa este $(10^n + 1)A$. Dacă $10^n + 1$ este liber de pătrate, pentru ca $(10^n + 1)A$ să fie pătrat perfect, va trebui ca A să fie divizibil cu $10^n + 1$ şi atunci A nu va mai avea n cifre. Căutând printre numerele de forma $10^n + 1$ constatăm că $11^2 \mid 10^{11} + 1$. Mai mult, folosind faptul că $a + 1 \mid a^k + 1$ pentru orice k impar, rezultă că $11^2 \mid 10^{11k} + 1$ pentru orice k impar. Dacă $10^{11k} + 1 = 11^2 B$, luând $A = 10^2 B$, avem că $(10^{11k} + 1)A = (110B)^2$ este pătrat perfect şi că A are $11k$ cifre. Într-adevăr, $10^{11k} > A = \left(\frac{10}{11}\right)^2 (10^{11k} + 1) > \frac{1}{2} \cdot (10^{11k} + 1)$, deci A are $11k$ cifre.

Remarcă: Exponentul $11k$, cu k impar, era uşor de găsit observând că pentru n impar $10^n + 1$ este divizibil cu 11 şi căutând n penrtru care $11^2 \mid 10^n + 1$. Din Lifting The Exponent Lemma avem, pentru n impar, $v_{11}(10^n + 1) = v_{11}(10 + 1) + v_{11}(n)$, deci trebuie $v_{11}(n) \geq 1$, adică n divizibil cu 11.

OBJ.84. Fie $a, b, p, q \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(p, q) = 1$ şi $aq \neq bp$. Demonstraţi că există o infinitate de numere întregi k pentru care numerele $pk + a$ şi $qk + b$ să fie prime între ele.

Gheorghe Stoica, Petroşani

Soluţie: Numerele $pk + a$ şi $qk + b$ sunt prime între ele dacă şi numai dacă există $x, y \in \mathbb{Z}$ astfel ca $x(pk + a) + y(qk + b) = 1$, adică astfel ca $k(px + qy) = 1 - ax - by$. Ştim că $(p, q) = 1$ implică existenţa unei mulţimi infinite de soluţii ale ecuaţiei $px + qy = 1$, mulţime de forma $M = \{(x_0 + nq, y_0 - np) \mid n \in \mathbb{Z}\}$, unde (x_0, y_0) este o soluţie particulară. Atunci alegând $k = 1 - ax - by$ cu $(x, y) \in M$, adică $k = 1 - ax_0 - by_0 - n(aq - bp)$, $n \in \mathbb{Z}$, obţinem o infinitate de numere k cu proprietatea din enunţ.

OBJ.85. Fie m, n numere reale astfel încât $0 \leq m \leq 1 \leq n$. Demonstraţi că dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, atunci are loc inegalitatea:

$$(m + 2)(n - 1)\sum_{cicl.} \frac{a}{ma + b + c} - (n + 2)(m - 1)\sum_{cicl.} \frac{a}{na + b + c} \geq 3(n - m).$$

Titu Zvonaru

Soluţie: Să demonstrăm mai întâi identitatea

$$\frac{3}{k + 2} - \sum_{cicl.} \frac{a}{ka + b + c} = \frac{k - 1}{k + 2} \sum_{cicl.} \frac{(a - b)^2}{(ka + b + c)(a + kb + c)}. \qquad (1)$$

Avem $\frac{3}{k + 2} - \sum_{cicl.} \frac{a}{ka + b + c} = \sum_{cicl.} \left(\frac{1}{k + 2} - \frac{a}{ka + b + c}\right) = \frac{1}{k + 2} \sum_{cicl.} \frac{b - a + c - a}{ka + b + c} =$

$$\frac{1}{k+2}\sum_{cicl.}\frac{b-a}{ka+b+c}+\frac{1}{k+2}\sum_{cicl.}\frac{c-a}{ka+b+c}=\frac{1}{k+2}\sum_{cicl.}\left(\frac{b-a}{ka+b+c}+\frac{a-b}{a+kb+c}\right)=$$
$$\frac{1}{k+2}\sum_{cicl.}\frac{(a-b)(ka+b+c-a-kb-c)}{(ka+b+c)(a+kb+c)}=\frac{k-1}{k+2}\sum_{cicl.}\frac{(a-b)^2}{(ka+b+c)(a+kb+c)},$$
adică (1) este adevărată.

Deoarece $\sum\frac{a}{a+b+c}=1$, rezultă că pentru $m=1$ sau $n=1$ inegalitatea din enunţ devine egalitate, presupunem $m<1<n$. Cum $na+b+c>ma+b+c$ şi $a+nb+c>a+mb+c$, putem scrie că $\frac{(a-b)^2}{(ma+b+c)(a+mb+c)}\geq\frac{(a-b)^2}{(na+b+c)(a+nb+c)}$, cu egalitate dacă $a=b$.

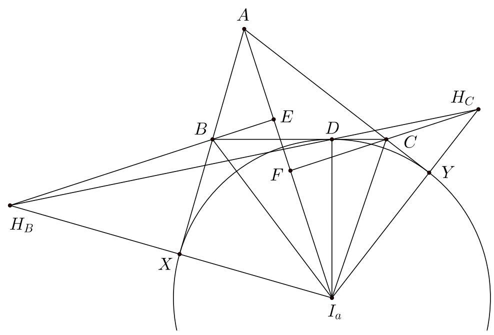
Folosind relaţia (1) pentru $k=m$ şi $k=n$, relaţia de mai sus implică
$$\frac{m+2}{m-1}\cdot\frac{m-1}{m+2}\sum_{cicl.}\frac{(a-b)^2}{(ma+b+c)(a+mb+c)}\geq\frac{n+2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n+2}\sum_{cicl.}\frac{(a-b)^2}{(na+b+c)(a+nb+c)},$$
adică $\frac{m+2}{m-1}\cdot\left(\frac{3}{m+2}-\sum_{cicl.}\frac{a}{ma+b+c}\right)\geq\frac{n+2}{n-1}\cdot\left(\frac{3}{n+2}-\sum_{cicl.}\frac{a}{na+b+c}\right)$, sau
$$\frac{n+2}{n-1}\sum_{cicl.}\frac{a}{na+b+c}-\frac{m+2}{m-1}\sum_{cicl.}\frac{a}{ma+b+c}\geq\frac{3}{n-1}-\frac{3}{m-1}.$$
Prin înmulţire cu $(n-1)(m-1)<0$ se obţine inegalitatea de demonstrat.

Remarcă: Pentru $m=0$ şi $n=2$ se obţine problema **OBJ.30.**.

OBJ.86. Fie I_a centrul cercului A-exînscris triunghiului ABC, D punctul de tangenţă al cercului A-exînscris cu latura $[BC]$ şi H_B, H_C ortocentrele triunghiurilor I_aBA, respectiv I_aCA. Arătaţi că punctele H_B, D şi H_C sunt coliniare.

Petru Braica şi Alina Ioan

Soluţie: Fie $\{X\}=H_BI_a\cap AB$ şi $\{Y\}=H_CI_a\cap AC$, iar E,F proiecţiile lui B, respectiv C, pe AI_a. Atunci $m(\sphericalangle BH_BX)=90^\circ-m(\sphericalangle H_BBX)=90^\circ-m(\sphericalangle ABE)=m(\sphericalangle BAE)=m(\sphericalangle CAF)=90^\circ-m(\sphericalangle ACF)=90^\circ-m(\sphericalangle H_CCY)=m(\sphericalangle CH_CY)$. Atunci triunghiurile dreptunghice H_BBX şi H_CCY sunt asemenea (UU), deci $\frac{H_BB}{BX}=\frac{H_CC}{CY}$. Dar cum $BX=BD$ şi $CY=CD$, rezultă $\frac{H_BB}{BD}=\frac{H_CC}{CD}$. În plus, $H_BB\parallel H_CC$ (ambele perpendiculare pe AI_a), deci $\sphericalangle H_BBD\equiv\sphericalangle H_CCD$, ceea ce împreună cu relaţia precedentă implică $\Delta\, H_BBD\sim\Delta\, H_CCD$.



Triunghiurile ABI_a şi ACI_a sunt obtunzunghice, iar E şi F se află de părţi diferite ale dreptei BC, deci H_B, H_C sunt de părţi diferite. Atunci unghiurile H_BDB şi H_CCD sunt opuse la vârf, deci punctele H_B, D şi H_C sunt coliniare.

OBJ.87. Doi copii, Ana şi Bogdan, joacă următorul joc. În colţul din stânga-jos al unei table 2016×2015 este plasat un jeton. Cei doi copii mută alternativ jetonul, fie în sus cu un număr par de pătrăţele, fie către dreapta cu un număr impar de pătrăţele. Ana mută prima. Cine nu mai poate muta, pierde. Care din cei doi copii are strategie câştigătoare? Dar dacă jocul s-ar fi desfăşurat pe o tablă 2015×2016?

Andrei Eckstein

Soluţie: Vom arăta că în ambele cazuri primul jucător are strategie de câştig. Numerotăm liniile de sus în jos, iar coloanele de la dreapta spre stânga, de la 1 până la 2015 sau 2016, după caz. Dacă jocul se desfăsoară pe o tablă cu un număr impar de coloane, primul jucător va muta pe una din primele două linii. Pe tabla 2016×2015, el mută 2014 pătrăţele în sus, până pe linia 2, coloana 2015. Jucătorul doi nu poate muta în sus, deci va muta orizontal, un număr impar de pătrăţele, ajungând pe o coloană pară. Primul jucător mută până pe linia 2, coloana 1 şi al doilea jucător nu mai are mutare. Pe tabla 2015×2016, primul jucător mută în sus 2012 pătrăţele, până pe linia 4, coloana 2016. Dacă al doilea jucător mută 2 în sus, până pe linia 2, coloana 2016, primul jucător mută 2015 la dreapta, până pe linia 2, coloana 1, ceea ce lasă al doilea jucător fără mutare. Dacă al doilea jucător mută spre dreapta (până la o coloană impară), primul jucător mută 2 în sus, ajungând pe linia 2 a unei coloane impare. Al doilea jucător mută la dreapta până pe linia 2 a unei coloane pare. Astfel, primul jucător va putea muta până pe linia 2, coloana 1 lăsând jucătorul 2 fără mutare şi câştigând.

RMT 3/2016

OBJ.88. Arătaţi că dacă $p_1, p_2, \ldots, p_{2016}$ sunt numere prime mai mari sau egale cu 3, atunci numărul $2^{p_1^2} + 2^{p_2^2} + \ldots + 2^{p_{2016}^2}$ nu este pătrat perfect.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Dacă p este un număr impar, atunci $p^2 = \mathcal{M}4 + 1$, deci 2^{p^2} are ultima cifră 2. O sumă de 2016 asemenea termeni va avea ultima cifră 2, deci nu va fi pătrat perfect.

OBJ.89. Într-un pătrat cu latura de 31 cm sunt 2016 furnici. Arătaţi că cel puţin două furnici se află la o distanţă mai mică de 1 centimetru.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Împărţim fiecare latură a pătratului în câte 44 de segmente egale, de lungime $\ell = \dfrac{31}{44}$ cm.

Prin aceste puncte ducem paralele la laturile pătratului, împărţind astfel suprafaţa pătratului în $44^2 = 1936$ suprafeţe pătrate mai mici. Având 2016 puncte, vor exista măcar două care să se afle în aceeaşi suprafaţă pătrată. Distană dintre ele este cel mult $\ell\sqrt{2} \approx 0,996 < 1$ cm.

OBJ.90. Dacă $x, y, z > 0$ şi $xy + yz + zx = 1$, arătaţi că $x + y + z \leq xyz + \dfrac{8}{27xyz}$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Eliminând numitorii, inegalitatea devine $27xyz(x+y+z) \leq 27(xyz)^2+8$. Notând $a = xy$, $b = yz$, $c = zx$, ştim că $a+b+c = 1$ şi trebuie să arătăm că $27(ab+bc+ca) \leq 27abc+8$. Omogenizând, avem de demonstrat inegalitatea $27(ab + bc + ca)(a + b + c) \leq 27abc + 8(a + b + c)^3$. Desfacem parantezele şi reducem termenii asemenea. Inegalitatea revine la $8(a^3 + b^3 + c^3) \geq 3(ab^2+a^2b+bc^2+b^2c+ca^2+c^2a)+6abc$ şi rezultă din adunarea inegalităţilor $2(a^3+b^3+c^3) \geq 6abc$ (inegalitatea mediilor) şi $3(a^3+b^3) \geq 3(ab^2+a^2b)$, echivalentă cu $3(a-b)^2(a+b) \geq 0$, cu analoagele acesteia.
Egalitatea are loc dacă $a = b = c$, deci pentru $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Remarcă: Marin Chirciu observă că exact cu aceeaşi metodă ca mai sus se poate demonstra că, în

general, dacă $x, y, z > 0$ verifică $xy+yz+zx = 1$, iar $n \in \left[0, \frac{9}{7}\right]$, atunci $x+y+z \leq nxyz+\frac{9-n}{27xyz}$.
Totuşi, cu alte metode, se pot demonstra inegalităţi şi mai tari, după cum se poate vedea mai jos.
Soluţie şi întărire: (*Titu Zvonaru*)[2]
Vom demonstra inegalitatea mai tare $x+y+z \leq \frac{9xyz}{4} + \frac{1}{4xyz}$. (1)
Într-adevăr, deoarece $\frac{9xyz}{4} + \frac{1}{4xyz} \leq xyz + \frac{8}{27xyz}$ este echivalentă cu $27(xyz)^2 \leq 1$, relaţie care rezultă din inegalitatea mediilor $\left(1 = xy+yz+zx \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2}\right)$, inegalitatea (1) este mai tare decât cea din enunţul problemei.
Prin omogenizare, inegalitatea (1) este echivalentă cu $4xyz(x+y+z)(xy+yz+zx) \leq 9(xyz)^2 + (xy+yz+zx)^3$ şi, după efectuarea calculelor, cu $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^2z^2 \geq x^3y^2z+x^3z^2y+y^3x^2z+y^3z^2x+z^3x^2y+z^3y^2x$ care este inegalitatea lui Schur pentru numerele xy, yz şi zx.

OBJ.91. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi ABC. Demonstraţi că:
a) $\sqrt{a[(b+c)^2-a^2]} + \sqrt{b[(c+a)^2-b^2]} + \sqrt{c[(a+b)^2-c^2]} \leq 3\sqrt{3abc}$;
b) $\sqrt{a(b+c-a)} + \sqrt{b(c+a-b)} + \sqrt{c(a+b-c)} \leq 3\sqrt[3]{abc}$.

Ovidiu Pop şi Zdravko Stark

Soluţie: **a)** Din inegalitatea dintre media aritmetică şi media pătratică, avem
$\sqrt{a[(b+c)^2-a^2]} + \sqrt{b[(c+a)^2-b^2]} + \sqrt{c[(a+b)^2-c^2]} \leq \sqrt{3}\,\cdot$
$\cdot\,\sqrt{a[(b+c)^2-a^2]+b[(c+a)^2-b^2]+c[(a+b)^2-c^2]}$, deci este suficient să demonstrăm că
$\sqrt{ab^2+ac^2-a^3+ba^2+bc^2-b^3+ca^2+cb^2-c^3+6abc} \leq 3\sqrt{abc}$,
adică $ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2 \leq a^3+b^3+c^3+3abc$ care este inegalitatea lui Schur.
Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c$. (Celălalt caz de egalitate la inegalitatea lui Schur, două variabile egale, a treia 0, nu convine, a, b, c fiind laturi de triunghi).
Remarcă: O altă soluţie, care arată şi ce ascunde de fapt inegalitatea de la **a)**, este următoarea:
Inegalitatea se rescrie $\sqrt{\frac{c[(a+b)^2-c^2]}{2abc}} + \sqrt{\frac{a[(b+c)^2-a^2]}{2abc}} + \sqrt{\frac{b[(c+a)^2-b^2]}{2abc}} \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}$, adică, folosind teorema cosinusului, $\sqrt{\cos C+1} + \sqrt{\cos A+1} + \sqrt{\cos B+1} \leq \frac{3\sqrt{6}}{2}$. Folosind formula $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, inegalitatea de demonstrat revine la $\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, care rezultă din inegalitatea lui Jensen pentru funcţia concavă $\cos : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$.

b) Împărţind cu $\sqrt{a+b+c}$, inegalitatea de la **a)** devine:

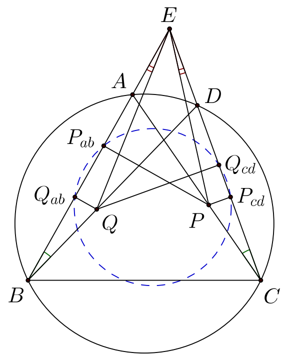
$$\sqrt{a(b+c-a)} + \sqrt{b(c+a-b)} + \sqrt{c(a+b-c)} \leq 3\sqrt{\frac{3abc}{a+b+c}}.$$

Însă din inegalitatea mediilor, $a+b+c \geq \sqrt[3]{abc}$, deci $3\sqrt{\frac{3abc}{a+b+c}} \leq 3\sqrt{\frac{3abc}{3\sqrt[3]{abc}}} = 3\sqrt[3]{abc}$.

[2] După primirea acestei soluţii, aceeaşi întărire a fost publicată în Gazeta Matematică de către Marius Stănean.

OBJ.92. Fie P un punct oarecare al diagonalei $[AC]$ şi Q acel punct al diagonalei $[BD]$ a unui patrulater inscriptibil $ABCD$, care îndeplineşte condiţia $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QD}{QB}$. Notăm cu P_{ab} şi P_{cd} proiecţiile punctului P pe dreptele AB şi CD, iar cu Q_{ab} şi Q_{cd} proiecţiile punctului Q pe dreptele AB şi CD. Arătaţi că punctele P_{ab}, Q_{ab}, P_{cd} şi Q_{cd} sunt conciclice.

Mihai Miculiţa



Soluţie: Dacă $AB \parallel CD$, atunci punctele P_{ab}, P şi P_{cd} sunt coliniare şi, la fel, Q_{ab}, Q şi Q_{cd} sunt coliniare astfel că $P_{ab}P_{cd}Q_{cd}Q_{ab}$ este dreptunghi, deci inscriptibil.
Dacă AB şi CD nu sunt paralele, fie $\{E\} = AB \cap CD$. Vom trata cazul $A \in (EB)$, cazul $B \in (AE)$ fiind analog.
$ABCD$-inscriptibil implică $\sphericalangle EBD \equiv \sphericalangle ECA$. (1). Atunci $\Delta\, EBD \sim \Delta\, ECA$, de unde $\dfrac{EB}{EC} = \dfrac{BD}{CA}$. Dar $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QD}{QB}$ implică $\dfrac{CA}{PC} = \dfrac{BD}{QB}$ şi $\dfrac{QB}{PC} = \dfrac{BD}{CA}$. Împreună cu (1), ultima relaţie implică $\Delta\, EBQ \sim \Delta\, ECP$, de unde $\sphericalangle BEQ \equiv \sphericalangle CEP$ şi $\sphericalangle BEP \equiv \sphericalangle CEQ$. (2). Aşadar semidreptele $(EP$ şi $(EQ$ sunt izogonale faţă de unghiul $\sphericalangle BEC$. Conform unei proprietăţi cunoscute pe care o vom demonstra mai jos, rezultă că proiecţiile punctelor P şi Q pe laturile unghiului sunt patru puncte conciclice.
Într-adevăr, din $\sphericalangle PEP_{ab} \equiv \sphericalangle QEQ_{cd}$ rezultă că triunghiurile dreptunghice PEP_{ab} şi QEQ_{cd} sunt asemenea, deci că $\dfrac{EP_{ab}}{EQ_{cd}} = \dfrac{PE}{QE}$. Analog se arată că avem şi $\dfrac{EP_{cd}}{EQ_{ab}} = \dfrac{PE}{QE}$. Din ultimele două relaţii rezultă $\dfrac{EP_{ab}}{EQ_{cd}} = \dfrac{EP_{cd}}{EQ_{ab}}$, adică $EP_{ab} \cdot EQ_{ab} = EP_{cd} \cdot EQ_{cd}$. Din reciproca teoremei puterii punctului rezultă că punctele P_{ab}, Q_{ab}, P_{cd} şi Q_{cd} sunt conciclice.

OBJ.93. Fie n un număr natural, $n \geq 3$. Considerăm numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in [0,1]$ şi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n + 1$. Demonstraţi că $a_1 a_2 \ldots a_n \leq 2$.

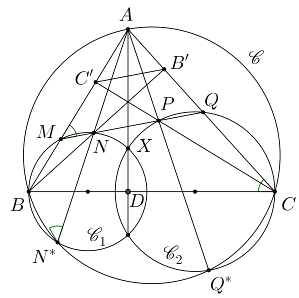
Leonard Giugiuc şi Diana Trăilescu

Soluţie: Din inegalitatea mediilor, $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot \dfrac{a_n}{2} \leq \left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \dfrac{a_n}{2}}{n} \right)^n = \left(\dfrac{n + 1 - \dfrac{a_n}{2}}{n} \right)^n \leq 1$ deoarece $a_n = n + 1 - a_1 - a_2 - \ldots - a_{n-1} \geq 2$.

OBJ.94. În triunghiul ascuţitunghic ABC se consideră înălţimea (AD) şi $X \in (AD)$ un punct oarecare. Cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ au centrele pe dreapta BC şi conţin punctele B şi X, respectiv C şi X. Cercul $\mathscr{C}_1$ taie înălţimea din B a triunghiului ABC în N, latura AB în M, iar cercul $\mathscr{C}_2$ taie înălţimea din C a triunghiului ABC şi latura AC în punctele P, respectiv Q. Notăm $\{N^*\} = (AN \cap \mathscr{C}_1$ şi $\{P^*\} = (AP \cap \mathscr{C}_2$. Demonstraţi că punctele A, B, C, N^* şi P^* sunt conciclice.

Petru Braica

Soluţia 1: Fie B', C' picioarele înălţimilor din B, respectiv C şi $\mathscr{C}$ cercul circumscris lui ABC. Omotetia de centru B care duce cercul $\mathscr{C}_1$ în cercul de diametrul $[BC]$ va duce $[MN]$ în $[C'B']$, deci $MN \parallel C'B'$. (Pentru o altă argumentare, vezi soluţia oficială de la problema 1, barajul 1, seniori, 2014.) Atunci $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle ASB$, unde $\{S, B\} = \mathscr{C} \cap \mathscr{C}_1$. Dacă $\{T\} = MN \cap AS$, atunci $XBMT$ e inscriptibil, deci $T \in MN \cap \mathscr{C}_1$, adică $T = N$, adică $S = N^*$ aparţine lui $\mathscr{C}$. Analog rezultă că $P^* \in \mathscr{C}$.



Soluţia 2: (schiţă) Ca la baraj, se arată că punctele M, N, P, Q sunt coliniare. Atunci inversiunea de centru A care duce M în B va transforma dreapta MN în $\mathscr{C} \setminus \{A\}$, de unde concluzia.

RMT 4/2016

OBJ.95. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ verifică $abc \leq 1$, atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + abc \geq a + b + c + 1$.

Marian Cucoaneş, Andrei Eckstein şi Sladjan Stankovik

Soluţie: Avem $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} \geq 3\dfrac{a}{\sqrt[3]{abc}}$. Adunând cu relaţiile analoage şi împărţind la 3 obţinem $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq \dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$. Atunci $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} - a - b - c \geq (a+b+c)\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}} - 1\right) \overset{(*)}{\geq} 1 - abc$, unde $(*)$ este evidentă dacă $abc = 1$, iar dacă $abc < 1$, după împărţire cu $1 - \sqrt[3]{abc} > 0$, $(*)$ rezultă din $\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \geq 3 \geq 1 + \sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{(abc)^2}$. Egalitate avem pentru $a = b = c = 1$.

OBJ.96. Fie x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 numere reale pozitive astfel încât

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \frac{1}{1+x_4} + \frac{1}{1+x_5} + \frac{1}{1+x_6} = 5.$$

Arătaţi că

$$\frac{1}{1+25x_1} + \frac{1}{1+25x_2} + \frac{1}{1+25x_3} + \frac{1}{1+25x_4} + \frac{1}{1+25x_5} + \frac{1}{1+25x_6} \geq 1.$$

Lucian Tuţescu şi Liviu Smarandache

Soluţia 1: Căutând eventual o spargere de forma $\dfrac{1}{1+25x} \geq a \cdot \dfrac{1}{x+1} + b$, $\forall x > 0$, găsim că $\dfrac{1}{1+25x} \geq \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 2(5x-1)^2 \geq 0$. Atunci $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{1+25x_k} \geq \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{1+x_k} - 6 \cdot \frac{2}{3} = 5 - 4 = 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = \dfrac{1}{5}$.

Soluţia 2: (*Vlad Vergelea*) Notând $a_k = \dfrac{1}{1+x_k}$, $k = \overline{1,6}$, ipoteza revine la $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} a_k = 5$, iar concluzia la $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{a_k}{25 - 24a_k} \geq 1$. Ea rezultă din aplicarea inegalităţii Cauchy-Buniakowsky-

Schwarz (forma Titu Andreescu): $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k}{25-24a_k}=\sum_{k=1}^{6}\frac{a_k^2}{25a_k-24a_k^2}\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{6}a_k\right)^2}{25\sum_{k=1}^{6}a_k-24\sum_{k=1}^{6}a_k^2}=$

$\displaystyle\frac{25}{125-24\sum_{k=1}^{6}a_k^2}\geq 1$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k^2\geq\frac{25}{6}$ care rezultă din inegalitatea dintre media aritmetică şi cea pătratică.

OBJ.97. Dacă $a,b\in\mathbb{Z}$, arătaţi că ab^6+2019 şi $ab^{2016}+2016$ nu pot fi simultan cuburi perfecte.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Presupunem că există $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel ca $ab^6+2019=x^3$ şi $ab^{2016}+2016=y^3$. Dacă $7\mid b$, cum $7\mid 2016$, rezultă că $7\mid y^3$, deci $7^3\mid y^3$. Cum $7^3\mid ab^{2016}$, rezultă $7^3\mid 2016$, ceea ce este fals. Aşadar b nu este multiplu de 7. Atunci $b^6\equiv 1 \pmod 7$ şi $x^3,y^3\equiv 0,1,6 \pmod 7$. Rezultă că $a+2019$ şi $a+2016$ trebuie să fie ambele congruente cu 0, 1 sau 6 (mod 7), ceea ce nu se poate.

OBJ.98. Arătaţi că există o infinitate de perechi de numere naturale astfel ca suma şi produsul lor să fie numere naturale răsturnate.

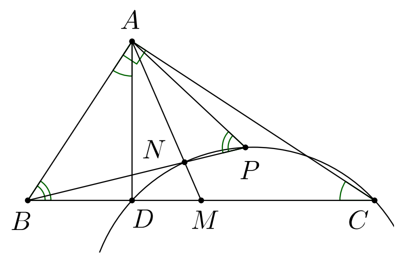
Gheorghe Stoica

Soluţie: Perechile de numere de forma $(2,\ 4\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}}7)$ au proprietatea din enunţ pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Într-adevăr, numerele $2\cdot4\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}}7=\underbrace{99\ldots9}_{n+1\text{ cifre}}4$ şi $2+4\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}}7=4\underbrace{99\ldots9}_{n+1\text{ cifre}}$ sunt răsturnate.

OBJ.99. Fie ABC un triunghi în care unghiul A este cel mai mare. Considerăm N un punct oarecare pe mediana $[AM]$ şi punctul $D\in(BC)$ astfel încât $\sphericalangle BAD\equiv\sphericalangle BCA$. Dacă cercul circumscris triunghiului CDG intersectează a doua oară dreapta BN în punctul P şi $\sphericalangle APB\equiv\sphericalangle ABC$, demonstraţi că $m(\sphericalangle A)=90°$.

Titu Zvonaru

Soluţie: Din puterea punctului B faţă de cercul circumscris triunghiului CDN rezultă $BD\cdot BC=BN\cdot BP$, iar din asemănarea triunghiurilor ABD şi CBA obţinem $AB^2=BD\cdot BC$. Aşadar, $BA^2=BN\cdot BP$ şi, cum unghiul B este comun, rezultă că $\Delta ABN\sim\Delta PBA$, deci $\sphericalangle APB\equiv\sphericalangle NAB\equiv\sphericalangle ABM$. Aşadar triunghiul ABM este isoscel, cu $MA=MB=MC$, deci M este centrul cercului circumscris ΔABC, de unde rezultă că $m(\sphericalangle BAC)=90°$.



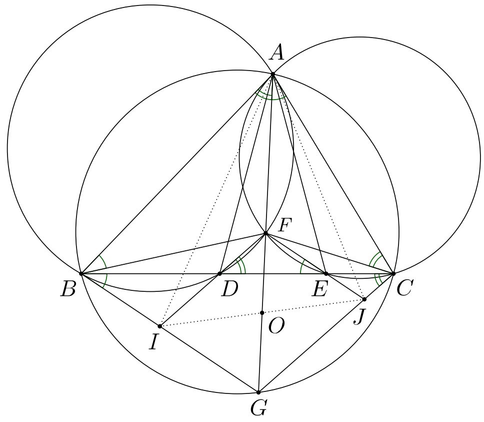
OBJ.100. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Cercul care trece prin punctul B şi este tangent la dreapta AC în punctul A, intersectează a doua oară latura $[BC]$ în punctul D, iar cercul care trece prin punctul C şi este tangent la dreapta AB în punctul A, intersectează a doua oară latura $[BC]$ în punctul E. Notăm cu F cel de-al doilea punct de intersecţie a celor două cercuri şi cu G cel de-al doilea punct de intersecţie a dreptei AF cu cercul circumscris triunghiului ABC. Mai considerăm punctele $\{I\}=BG\cap FD$ şi $\{J\}=CG\cap FE$. Arătaţi că:

a) patrulaterul $FIGJ$ este paralelogram;

b) punctul F este centrul de greutate al triunghiului AIJ.

Mihai Miculiţa

Soluţie: a) Avem $\sphericalangle GBC \equiv \sphericalangle GAC = \sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle ABF$ şi $\sphericalangle GCB \equiv \sphericalangle GAB = \sphericalangle FAB \equiv \sphericalangle ACF$. Patrulaterele $ABDF$ şi $ACEF$ fiind inscriptibile, avem şi $\sphericalangle FED \equiv \sphericalangle FAC$ şi $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle FAB$. Rezultă că $\sphericalangle FEB \equiv \sphericalangle EBG$, deci $FE \parallel BG$, şi $\sphericalangle FDC \equiv \sphericalangle DCG$, adică $FD \parallel CG$. Din aceste paralelisme rezultă că $FIGJ$ este paralelogram.
b) Fie O centrul paralelogramului. Avem $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle CAF$ şi $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle ACF$, deci $\Delta ABF \sim \Delta CAF$, de unde $AF^2 = BF \cdot CF$. Dar $\sphericalangle FBG \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FGC$ şi $\sphericalangle BFG \equiv \sphericalangle GFC$, deci $\Delta BFG \sim \Delta GFC$, de unde $FG^2 = BF \cdot CF$. Rezultă că $AF^2 = BF \cdot CF = GF^2$, deci $AF = GF$, adică $AF = 2FO$, deci F împarte mediana $[AF]$ în raport 2, deci este centrul de greutate.
Remarcă: Rezultatul rămâne valabil şi dacă triunghiul este obtuzunghic.

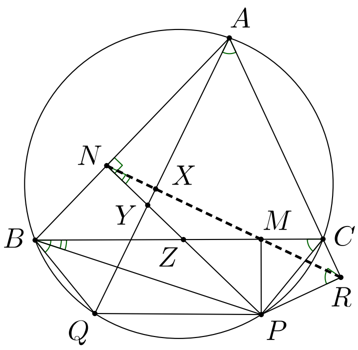


RMT 1/2017

OBJ.101. Fie $ABPC$ un patrulater înscris în cercul $\mathscr{C}$. Paralela prin P la BC intersectează a doua oară cercul $\mathscr{C}$ în punctul Q. Fie M şi N proiecţiile punctului P pe dreptele BC, respectiv AB. Demonstraţi că $MN \perp AQ$.

prelucrare *Gheorghe Eckstein*

Soluţia 1: Vom considera numai configuraţia din figura alăturată, celelalte situaţii tratându-se analog.
Fie $\{X\} = NM \cap AQ$, $\{Y\} = PN \cap AQ$ şi $\{Z\} = PN \cap BC$. Atunci $m(\sphericalangle YPQ) = m(\sphericalangle NZB) = 90° - m(\sphericalangle ABC)$ şi $m(\sphericalangle YQP) = m(\sphericalangle ABP) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle MBP) = m(\sphericalangle ABC) + m(\sphericalangle MNP)$ (patrulaterul $BPMN$ este inscriptibl). Din triunghiul PYQ, $m(\sphericalangle XYN) = m(\sphericalangle PYQ) = 180° - m(\sphericalangle YPQ) - m(\sphericalangle YQP) = 90° - m(\sphericalangle MNP)$, iar din triunghiul XYN rezultă că $m(\sphericalangle NXY) = 90°$.
Soluţia 2: Fie $PR \perp AC$, $R \in AC$. Atunci punctele N, M, R sunt coliniare (dreapta lui Simson). Fie $\{X\} = AQ \cap NM$. Atunci $ABQC$ şi $PRCM$ sunt inscriptibile, iar $BCPQ$ este trapez isoscel. Toate astea implică:



$m(\sphericalangle XAR) + m(\sphericalangle XRA) = m(\sphericalangle QAC) + m(\sphericalangle MRC) = m(\sphericalangle QBC) + m(\sphericalangle MRC) = m(\sphericalangle PCB) + m(\sphericalangle MRC) = m(\sphericalangle MRP) + m(\sphericalangle MRC) = 90°$, de unde concluzia.

OBJ.102. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ şi p un număr prim. Arătaţi că dacă p divide $n^3 - 8$ şi n divide $p - 4$, atunci $p - 3$ este pătrat perfect.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Cum $n \mid p - 4$ şi $n > 2$, rezultă $p - 4 \geq n > 2$, deci $p > 6$.
Cum $p \mid n^3 - 8 = (n-2)(n^2 + 2n + 4)$, rezultă că $p \mid n - 2$ sau $p \mid n^2 + 2n + 4$. Primul caz este exclus căci $p \geq n + 4 > n - 2 > 0$. Aşadar, $p \mid n^2 + 2n + 4$. Din $n \mid p - 4$ rezultă că există un $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $nk = p - 4$. Aşadar $p = nk + 4$, deci p divide $n^2 + 2n + 4$ şi $kn + 4$, deci şi diferenţa $n^2 + 2n - kn = n(n + 2 - k)$. Cum $p > n$, rezultă că p divide $n + 2 - k$. Să observăm că $n^2 + 2n + 4 \geq p = nk + 4$ implică $n + 2 \geq k$ şi că $p \geq n + 4 > n + 2 - k \geq 0$, deci singura posibilitate rămâne ca $n + 2 - k = 0$. Atunci $p = nk + 4 = n^2 + 2n + 4$, deci $p - 3 = (n+1)^2$ şi

concluzia.
Remarcă: Există numere cu proprietatea din enunţ, de exemplu $p = 67$ şi $n = 7$.

OBJ.103. Fie a, b, c, d, e numere reale cu proprietatea că $a + b + c + d + e \geq 5abcde$. Arătaţi că $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq 5abcde$.

Lucian Tuţescu şi Ion Nedelcu

Soluţie: Dacă $abcde \leq 0$, atunci $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4 \geq 0 \geq 5abcde$.
Dacă $abcde > 0$, atunci numerele $x = |a|$, $y = |b|$, $z = |c|$, $u = |d|$, $v = |e|$ verifică şi ele $5xyzuv \leq x + y + z + u + v$. Într-adevăr, $5xyzuv = 5|abcde| = 5abcde \leq a + b + c + d + e \leq |a| + |b| + |c| + |d| + |e| = x + y + z + u + v$. Este suficient să demonstrăm că $x, y, z, u, v > 0$ satisfac concluzia.
Vom demonstra că $(x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4)^4 \cdot 5xyzuv \geq (5xyzuv)^4(x + y + z + u + v)$ de unde, folosind că $5xyzuv \leq x + y + z + u + v$ va rezulta că $(x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4)^4 \geq (5xyzuv)^4$ şi concluzia. Avem că $x^4 + y^4 + z^4 + u^4 + v^4 \geq (x + y + z + u + v) \cdot \sqrt[5]{(xyzuv)^3}$. Această inegalitate este chiar inegalitatea Muirhead $[4, 0, 0, 0, 0] \geq \left[\frac{8}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right]$ (1). Pe de altă parte, din inegalitatea mediilor, $x + y + z + u + v \geq 5\sqrt[5]{xyzuv}$ (2). Ridicând inegalitatea (1) la puterea a 4-a, inegalitatea (2) la puterea a 3-a şi înmulţindu-le, obţinem tocmai inegalitatea dorită.

OBJ.104. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ atunci

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} - \frac{a+b+c}{2}.$$

Mircea Lascu şi Titu Zvonaru

Soluţie: Atât membrul stâng cât şi cel drept sunt mai mari decât $\frac{a+b+c}{2}$. Scădem această cantitate din ambii membri. Avem: $\sum_{cicl} \frac{a^2}{b+c} - \frac{a+b+c}{2} = \sum_{cicl} \frac{a(a-b) + a(a-c)}{2(b+c)} =$
$\sum_{cicl} \frac{a(a-b)}{2(b+c)} + \sum_{cicl} \frac{b(b-a)}{2(c+a)} = \sum_{cicl} \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{2(a+c)(b+c)}$ şi
$\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} - (a+b+c) = \frac{3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + a + b + c} = \sum_{cicl} \frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + a + b + c}.$
Este suficient să demonstrăm că $\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{2(a+c)(b+c)} \geq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + a + b + c}$. Dacă $a = b$ avem egalitate, dacă nu, rămâne de arătat că $(a + b + c)\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + (a + b + c)^2 \geq 2(a + c)(b + c)$, ceea ce se arată uşor. În ultima inegalitate nu putem avea egalitate, aşa încât în inegalitatea din enunţ avem egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$.

OBJ.105. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$. Arătaţi că $(a + b)^2(a + c)^2(a + d)^2(b + c)^2(b + d)^2(c + d)^2 \geq (a + b + c + d)^3(abc + abd + acd + bcd)^3$.

Marian Cucoaneş

Soluţie: Se verifică prin calcul direct identitatea
$(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) - (a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd) = (ac - bd)^2$.
Ea implică $(a + b)(b + c)(c + d)(d + a) \geq (a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd)$. Analog se obţin inegalităţile $(a + c)(c + b)(b + d)(d + a) \geq (a + b + c + d)(abc + abd + acd + bcd)$ şi $(a+c)(c+d)(d+b)(b+a) \geq (a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)$. Înmulţind aceste trei inegalităţi o obţinem pe cea din enunţ. Egalitate avem dacă şi numai dacă $a = b = c = d$.

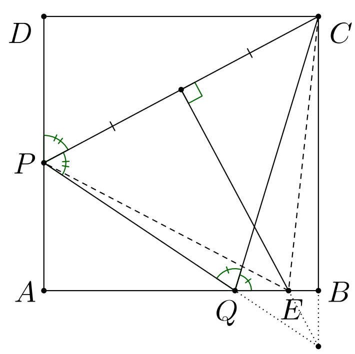
OBJ.106. Pentru câte dintre perechile de numere consecutive din mulţimea $\{1000, 1001, \dots, 2000\}$ nu este nevoie de trecere peste ordin atunci când adunăm cele două numere?

Concurs SUA, 1992

Soluţie: Împărţim perechile de numere consecutive în următoarele categorii: I. perechi de forma $(\overline{1abc}, \overline{1ab(c+1)})$, unde $c \neq 9$, II. perechi de forma $(\overline{1ab9}, \overline{1a(b+1)0})$, unde $b \neq 9$, III. perechi de forma $(\overline{1a99}, \overline{1(a+1)00})$, unde $a \neq 9$ şi IV. perechea $(1999, 2000)$. Dintre perechile din prima categorie convin cele cu $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Fiecare din cifrele a, b, c poate fi aleasă în 5 moduri, deci sunt $5^3 = 125$ perechi convenabile în prima categorie. Dintre perechile din categoria a doua convin cele cu $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Fiecare din cifrele a şi b poate fi aleasă în 5 moduri, deci sunt $5^2 = 25$ perechi convenabile în această categorie. În categoria a treia sunt convenabile perechile cu $a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, adică 5 perechi. În fine, convine şi perechea $(1999, 2000)$. În total sunt aşadar $125 + 25 + 5 + 1 = 156$ de perechi convenabile.

OBJ.107. Pe laturile pătratului $ABCD$ se consideră punctele $P \in (AD)$ şi $Q \in (AB)$, aşa încât $m(\sphericalangle AQP) = 2m(\sphericalangle QCB)$. Dacă mediatoarea segmentului $[PC]$ taie latura $[AB]$ în E, arătaţi că $\sphericalangle ECB \equiv \sphericalangle QPE$.

Mihaela Berindeanu



Soluţie: Fie $m(\sphericalangle BCQ) = a$. Atunci $m(\sphericalangle AQP) = 2a$, $m(\sphericalangle BQP) = 180° - 2a$, cu $m(\sphericalangle BQC) = 90° - a$, deci $(QC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BQP$. În plus, cum $(AC$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle QAP$, obţinem că punctul C este centrul cercului A-exînscris triunghiului AQP. Deoarece $m(\sphericalangle APQ) = 90° - 2a$ avem că $m(\sphericalangle QPC) = 45° + a$ (1) şi $m(\sphericalangle QCP) = 45°$ (2). Din (2) rezultă $m(\sphericalangle BCP) = 45° + a$, deci BC, PQ şi mediatoarea lui $[CP]$ sunt concurente şi din $\sphericalangle ECP \equiv \sphericalangle EPC$ obţinem concluzia.

OBJ.108. Determinaţi perechile (m, n) de numere naturale nenule cu proprietatea că dreptunghiul $m \times n$ poate fi pavat cu un număr par de dominouri (dreptunghiuri 1×2), jumătate din ele dispuse orizontal, jumătate vertical.

prelucrare *Andrei Eckstein*

Soluţie: Dacă punem un număr par de dominouri cu arie 2, deducem că $4 \mid mn$. Vom arăta că perechile convenabile sunt cele cu $8 \mid mn$, exceptând $(8k, 1)$ şi $(1, 8k)$ care evident nu convin (nu putem plasa deloc dominouri orizontale, respectiv verticale).

Perechile $(2k, 2\ell)$ cu $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, $2 \mid k \cdot \ell$, sunt convenabile: împărţim dreptunghiul în $k \cdot \ell$ pătrate 2×2. Cum $2 \mid k \cdot \ell$, putem pava jumătate din aceste pătrate cu câte două dale orizontale, iar jumătate cu câte două dale verticale.

Un dreptunghi 8×3 se poate pava astfel: îl împărţim într-un dreptunghi 8×1 pavat cu 4 dale verticale şi un dreptunghi 8×2, acesta din urmă pavat cu două dominouri verticale şi 6 orizontale. Conform celor de mai sus, putem pava convenabil dreptunghiuri 8×2 şi 8×3, deci putem pava orice dreptunghi $8 \times (2a + 3b)$, cu $\forall\, a, b \in \mathbb{N}$, nu ambele 0. Cum $\{2a + 3b \mid a, b \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus \{1\}$, putem pava orice dreptunghi $8 \times t$, $\forall\, t \geq 2$, deci orice dreptunghi $(8k) \times t$, $\forall\, k, t \in \mathbb{N}^*$, $t > 1$.

Să demonstrăm că dacă 8 nu divide mn, atunci pavarea nu se poate face. Ştim că măcar una din dimensiuni trebuie să fie pară. De exemplu m. Atunci colorăm cele m linii alternativ cu alb şi negru. Aria albă este egală cu cea neagră, iar dominourile verticale acoperă câte un pătrăţel din fiecare culoare. Rezultă că şi cele orizontale care stau pe două pătrate albe, trebuie să fie la fel de multe ca cele care stau pe două pătrate negre. Aşadar trebuie să avem un număr par de dale

orizontale (deci şi verticale). Aşadar numărul dominourilor este M4, iar aria M8.
Remarcă: O problemă asemănătoare se găseşte în cartea lui Arthur Engel *Probleme de matematică - strategii de rezolvare* (problema 9, capitolul 2).

RMT 2/2017

OBJ.109. Fie M şi N două puncte izogonale [3] din triunghiul ABC. Notăm cu P cel de-al doilea punct de intersecţie a dreptei AM cu cercul circumscris triunghiului MBC, iar cu Q cel de-al doilea punct de intersecţie a dreptei AN cu cercul circumscris triunghiului NBC. Arătaţi că $MN \parallel PQ$.

Mihai Miculiţa

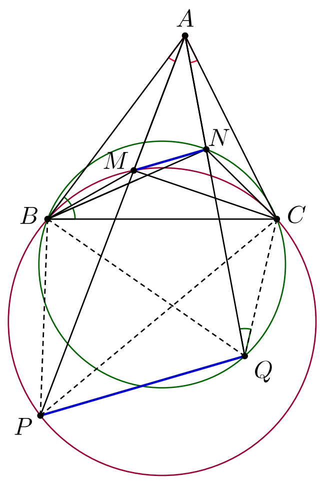
Soluţie: Patrulaterul $BMCP$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle MPC \equiv \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NBA$. Avem şi $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle BAN$, deci $\Delta\, PAC \sim \Delta BAN$ (UU), deci $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{AB}{AP}$, de unde

$$AN \cdot AP = AB \cdot AC.$$

Analog, folosind asemănarea triunghiurilor ABM şi AQC (sau pe cea a triunghiurilor ABQ şi ABM) obţinem

$$AM \cdot AQ = AB \cdot AC.$$

Aşadar, $AN \cdot AP = AM \cdot AQ$, sau $\dfrac{AM}{AP} = \dfrac{AN}{AQ}$, ceea ce implică $MN \parallel PQ$.



OBJ.110. Fie A o mulţime formată din 10 numere naturale nenule consecutive şi F mulţimea fracţiilor care au numărătorii şi numitorii din mulţimea A. Printre fracţiile din F, care sunt mai multe: cele reductibile sau cele ireductibile?

Gheorghe Stoica

Soluţie: Vom arăta că din cele 100 de fracţii, cel mult 46 pot fi reductibile, deci cel puţin 54 sunt ireductibile (adică acestea sunt mai multe).
Dintre cele 100 de fracţii, 10 sunt echiunitare. Acestea ar putea fi toate ireductibile (dacă $1 \in A$, printre ele se află şi fracţia $\dfrac{1}{1}$ care este ireductibilă). Celelalte fracţii au numărătorul diferit de numitor. Dacă o asemenea fracţie se simplifică prin $d > 1$, atunci d divide atât numitorul cât şi numărătorul, deci şi diferenţa acestora care este cel mult 9. Dacă o fracţie se simplifică, ea se simplifică măcar printr-un divizor prim, mai mic decât 9, deci fracţiile reductibile se pot simplifica prin 2, 3, 5 sau 7. Printre cele 10 numere, 5 sunt pare. Putem alege numărătorul în 5 moduri, numitorul în 4 moduri, deci sunt 20 de fracţii care nu sunt echiunitare şi care se simplifică cu 2. Printre cele 10 numere se află cel mult 4 multipli de 3, deci sunt cel mult $4 \cdot 3 = 12$ fracţii care se simplifică cu 3 (dar dacă sunt 4 multipli de 3, atunci doi sunt pari, deci două dintre fracţiile care se simplifică cu 3 sunt fracţii pe care le-am numărat deja ca simplificându-se cu 2). Printre cele 10 numere sunt exact doi multipli de 5 care determină două fracţii care se simplifică cu 5 (în afara celor echiunitare). La fel, sunt cel mult două fracţii care se simplifică cu 7, deci sunt

[3] adică astfel încât $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC$, $\sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NBA$ şi $\sphericalangle MCA \equiv \sphericalangle NCB$

cel mult $10+20+12+2+2=46$ de fracţii care se pot simplifica. (De fapt numărul maxim de fracţii reductibile este 44 şi se atinge, de exemplu, pentru $A=\{6,7,\ldots,15\}$.)

OBJ.111. Ştiind că $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sunt numere reale pozitive, $n\geq 3$, demonstraţi că

$$\frac{a_1}{4a_1^2+a_2^2}+\frac{a_2}{4a_2^2+a_3^2}+\ldots+\frac{a_n}{4a_n^2+a_1^2}\leq\frac{1}{5}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Florin Rotaru

Soluţie: Demonstrăm că $\dfrac{x}{4x^2+y^2}\leq\dfrac{3y+2x}{25xy}$, pentru orice $x,y>0$. (*)
Scriind, pe rând, această inegalitate pentru $x=a_i$, $y=a_{i+1}$, $i=\overline{1,n}$ (unde $a_{n+1}=a_1$) şi adunând aceste inegalităţi, o obţinem pe cea din enunţ.
Inegalitatea de mai sus se poate rescrie echivalent $(x-y)^2(8x+3y)\geq 0$, inegalitate evidentă, satisfăcută cu egalitate numai dacă $x=y$.
Rezultă că în inegalitatea din enunţ avem egalitate dacă şi numai dacă numerele $a_1,a_2,\ldots,a_n$ sunt egale.
Remarcă: (*Vlad Vergelea*) Inegalitatea (*) revine la $8x^3+2xy^2+3y^3\geq 13x^2y$ care rezultă din inegalitatea mediilor: $8x^3+2xy^2+3y^3\geq 13\sqrt[13]{(x^3)^8\cdot(xy^2)^2\cdot(y^3)^3}=13x^2y$.

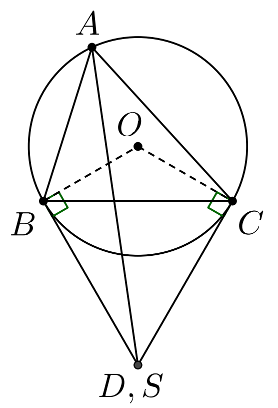
OBJ.112. În triunghiul ABC notăm cu B' piciorul perpendicularei din B pe AC şi cu C' piciorul perpendicularei din C pe AB. Arătaţi că dacă

$$AC+\frac{2}{\sqrt{3}}\,BB'=AB+\frac{2}{\sqrt{3}}\,CC',$$

atunci punctul lui Fermat al triunghiului se află pe simediana din A.

Titu Zvonaru

Soluţie: Cu notaţiile standard, relaţia din enunţ se scrie $b+\dfrac{2}{\sqrt{3}}h_b=c+\dfrac{2}{\sqrt{3}}h_c$, adică $b+\dfrac{4S}{b\sqrt{3}}=c+\dfrac{4S}{c\sqrt{3}}$, sau încă $b-c=\dfrac{4S}{bc\sqrt{3}}(b-c)$. Folosind că $2S=bc\sin A$, ultima relaţie revine la $(b-c)\left(\sin A-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$. Sunt posibile trei situaţii: $b=c$, $m(\sphericalangle A)=120^\circ$ sau $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.



Vom folosi următoarele fapte bine cunoscute:
1. Dacă S este punctul de intersecţie a tangentelor în B şi C la cercul circumscris lui ABC, atunci AS este dreapta suport a simedianei din A.
2. Dacă în exteriorul triunghiului ABC se construieşte triunghiul echilateral BCD, atunci punctul lui Fermat se află pe dreapta AD.
3. Dacă $m(\sphericalangle A)\geq 120^\circ$, punctul lui Fermat este chiar A.

În consecinţă, dacă $AB=AC$ atunci dreptele AD şi AS coincid (coincid şi cu mediatoarea lui $[BC]$), iar concluzia este evidentă. La fel, dacă $m(\sphericalangle A)=120^\circ$, atunci punctul lui Fermat, A, se află pe simediana din A. În fine, dacă $m(\sphericalangle A)=60^\circ$ şi notăm centrul cercului circumscris lui ABC cu O, atunci $m(\sphericalangle BOC)=2m(\sphericalangle A)=120^\circ$, deci $m(\sphericalangle DBO)=m(\sphericalangle DCO)=90^\circ$, adică DB şi DC sunt tocmai tangentele în B, respectiv C la cercul circumscris, ceea ce înseamnă că $D=S$ şi concluzia.

OBJ.113. Fie $a, b, c > 0$ cu $a + b + c = 3$. Demonstraţi că

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{51}{9 + 8abc}.$$

Marian Cucoaneş

Soluţie: (*Vlad Vergelea*) Inegalitatea se scrie echivalent $(ab + bc + ca)(9 + 8abc) \geq 51abc$. Dar $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c) = 9abc$ implică $ab + bc + ca \geq 3\sqrt{abc}$. Este atunci suficient să arătăm că $9 + 8abc \geq 17\sqrt{abc}$. Notând $\sqrt{abc} = x$, ştim din inegalitatea mediilor că $x \leq 1$ şi vrem să arătăm că $9 + 8x^2 \geq 17x$, care se mai scrie $(1 - x)(9 - 8x) \geq 0$, adevărat deoarece $x \leq 1$.
Remarcă: Cu aceeaşi metodă se poate demonstra că, în ipotezele de mai sus, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{51}{k + (17 - k)abc},$$

pentru orice $k \geq 8,5$. (Cu cât k este mai mic, cu atât inegalitatea este mai tare.) Cea mai tare inegalitate de această formă ce poate fi obţinută prin această metodă este $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{6}{1 + abc}$. Totuşi, după cum ne demonstrează *Titu Zvonaru*, cu metode avansate se poate arăta că inegalitatea de mai sus este adevărată pentru orice $k \geq 6,12$.

OBJ.114. În fiecare pătrat unitate al unui dreptunghi $m \times n$, $m, n \geq 4$, se scrie unul dintre numerele 1 şi -1, astfel încât suma celor 6 numere scrise în orice dreptunghi de lungime 3 şi lăţime 2 este 0. Câte asemenea completări există?

Andrei Eckstein

Soluţie: Nu putem avea trei cifre identice în trei pătrate „consecutive” (pe orizontală sau verticală). Într-adevăr, dacă pe o linie am avea trei cifre identice, ± 1, în trei coloane consecutive, în cele trei pătrate de deasupra şi dedesubt trebuie să fie scris celălalt număr ∓ 1, dedesubt şi deasupra iarăşi ± 1 şi aşa mai departe; privind dreptunghiul format din trei linii şi două dintre coloanele cu pricina, am avea patru de 1 şi doi de -1 sau invers.
Dacă avem o succesiune de forma $XOOX$, cu $X \neq O \in \{-1, 1\}$, dacă sub unul din cei doi de O ar mai fi un O, atunci linia de dedesubt (sau deasupra, dacă cumva este vorba de ultima linie), trebuie să fie $XXOX$ (sau $XOXX$ care este similar). Obligatoriu, sub cei doi de X trebuie să punem doi de O, dar atunci pe coloanele 2-3, liniile 1-2-3 vom avea 4 de O. Aşadar nu putem avea un O sub secvenţa de OO. Nu putem avea nici XX pentru că am avea (obligatoriu) $OXXO$ sub $XOOX$. Urmărind sumele în diversele dreptunghiuri formate pe primele 3 linii, constatăm că dedesubt nu putem avea nicio combinaţie. În concluzie, nu putem avea două pătrăţele completate identic, cu excepţia cazului în care este vorba de primele două (sau ultimele două) coloane ale dreptunghiului.
Dacă am avea XXO pe primele 3 coloane ale unei linii $\ell \leq m - 3$, pe primele trei coloane ale liniei $\ell + 1$ trebuie să punem un X şi doi de O. Dacă pun XOO, linia $\ell + 2$ ar trebui să fie $*XX$ (pentru a avea trei X şi trei O pe coloanele 2+3) dar deja avem prea mulţi X pe primele două coloane. Similar, dacă pe linia $\ell + 1$ punem OXO, pe linia $\ell + 2$ trebuie să punem $OO*$ pentru a avea $3X + 3O$ pe primele două coloane, dar nu mai putem avea şi pe liniile $\ell + 1$ şi $\ell + 2$. Rămâne completarea liniei doi cu OOX. Linia $\ell + 2$ trebuie să fie XOX, dar atunci avem doi de X vecini nesituaţi la margine, ceea ce, am văzut, este imposibil. Putem reface raţionamentul şi în sus şi ajunge la concluzia că putem avea doi de XX la începutul unui rând numai dacă rândul este unul din primele trei rânduri şi totodată unul din ultimele trei rânduri. Pentru $m \geq 6$ această situaţie nu mai poate avea loc. Pentru $m = 5$, iarăşi, am putea avea XX la începutul unei linii pentru că le-am putea avea numai la începutul liniei 3, ori, am văzut mai sus că dacă linia 3 începe cu XX atunci şi linia 4 începe cu XX, ceea ce nu se poate (urcând în sus obţinem contradicţie).

Rămâne că în cazul în care $m \geq 5$ sau $n \geq 5$ nu putem avea pătrate adiacente completate la fel, deci putem completa numai în tablă de şah; sunt două asemenea completări şi ambele satisfac condiţia dată.
Pentru tabla 4×4 exista 4 completări care se găsesc tratând cazuri, ca mai sus. (Pe lângă completările în care pătrăţele adiacente primesc numere diferite - sunt două completări tip tablă de şah, mai există cele două din figura alăturată.)

± 1	∓ 1	± 1	∓ 1
∓ 1	∓ 1	± 1	± 1
± 1	± 1	∓ 1	∓ 1
∓ 1	± 1	∓ 1	± 1

OBJ.115. Determinaţi numerele naturale nenule x, y, p astfel încât $(p+2)^x - 2^y = (p-2)^x + 2^y$.

dr. RMT[4]

Soluţie: Dacă $x = 1$ atunci $2^y = 2$, deci $y = 1$ (pentru p arbitrar).
În continuare presupunem $x \geq 2$.
În cazul în care p este impar:

Arătăm că x trebuie să fie par. Dacă $x > 1$ ar fi impar, atunci $(p+2)^x - (p-2)^x = 2^{y+1}$, deci $4\big((p+2)^{x-1} + (p+2)^{x-2}(p-2) + \ldots + (p-2)^{x-1}\big) = 2^{y+1}$, adică $(p+2)^{x-1} + (p+2)^{x-2}(p-2) + \ldots + (p-2)^{x-1} = 2^{y-1}$. Membrul stâng este o sumă de x numere impare. Dacă $y > 1$ rezultă x este par. Dacă $y = 1$, rezultă $x = 1$, contradicţie. Aşadar x este par, deci $x = 2n$, cu $n \in \mathbb{N}^*$.
Ecuaţia revine la $(p+2)^{2n} - (p-2)^{2n} = 2^{y+1}$, deci la $[(p+2)^n - (p-2)^n] \cdot [(p+2)^n + (p-2)^n] = 2^{y+1}$.
Pe de o parte, cei doi factori sunt pari, diferenţa dintre ei fiind $2(p-2)^n$ care este de $M_4 + 2$, pe de altă parte ei sunt puteri ale lui 2, deci unul dintre numere este 2, celălalt 2^y. Dacă $p > 1$, cum $(p+2)^n - (p-2)^n < (p+2)^n + (p-2)^n$, obţinem că $(p+2)^n - (p-2)^n = 2$ şi $(p+2)^n + (p-2)^n = 2^y$.
Însă $2 = [(p+2) - (p-2)] \cdot [(p+2)^{n-1} + \ldots + (p-2)^{n-1}]$ duce la o contradicţie (membrul drept este multiplu de 4). Dacă $p = 1$, avem $3^n - 1 < 3^n + 1$, deci trebuie ca $3^n - 1 = 2$ şi $3^n + 1 = 2^y$.
Rezultă $y = 2$, $n = 1$, deci $x = 2$.

În cazul p par:
- Dacă $p = 2$, ecuaţia revine la $2^{2x} = 2^{y+1}$, cu soluţile $x = k$, $y = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- Dacă $p > 2$ este de forma $p = 8m + 2$, ecuaţia $(8m+4)^x - (8m)^x = 2^{y+1}$ revine la $4\big((8m+4)^{x-1} + (8m+4)^{x-2}(8m) + \ldots + (8m+4)(8m)^{x-2} + (8m)^{x-1}\big) = 2^{y+1}$. În paranteză toţi termenii sunt divizibli cu 2^{2x-1} cu excepţia primului care este divizibil numai cu 2^{2x-2}. Aşadar exponentul lui 2 în membrul stâng este $2x$. Rezultă că $y + 1 = 2x$, ceea ce însă nu este posibil deoarece membrul stâng este mai mare ca $2^{2x} = 2^{y+1}$.
- Dacă p este de forma $p = 8m + 6$, ecuaţia $(8m+8)^x - (8m+4)^x = 2^{y+1}$ revine la $4\big((8m+8)^{x-1} + (8m+8)^{x-2}(8m+4) + \ldots + (8m+8)(8m+4)^{x-2} + (8m+4)^{x-1}\big) = 2^{y+1}$. În paranteză toţi termenii sunt divizibli cu 2^{2x-1} cu excepţia ultimului care este divizibil numai cu 2^{2x-2}. Aşadar exponentul lui 2 în membrul stâng este $2x$. Rezultă că $y + 1 = 2x$, ceea ce însă nu este posibil deoarece membrul stâng este mai mare ca $2^{2x} = 2^{y+1}$.
- Dacă p este de forma $4m$, ecuaţia $(4m+2)^x - (4m-2)^x = 2^{y+1}$ revine la $(2m+1)^x - (2m-1)^x = 2^{y-x+1}$, adică la $(2m+1)^{x-1} + (2m+1)^{x-2}(2m-1) + \ldots + (2m+1)(2m-1)^{x-2} + (2m-1)^{x-1} = 2^{y-x}$.
În paranteză toţi cei x termeni sunt impari, deci trebuie ca x să fie par. (Membrul stâng are cel puţin doi termeni, deci $y - x = 0$ nu convine).
Dacă $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$, ecuaţia revine la $[(2m+1)^n - (2m-1)^n] \cdot [(2m+1)^n + (2m-1)^n] = 2^{y-x+1}$.
Pe de o parte, cei doi factori sunt pari, diferenţa dintre ei fiind $2(2m-1)^n$ care este de $M_4 + 2$, pe de altă parte ei sunt puteri ale lui 2, deci unul dintre numere este 2, celălalt 2^{y-x}. Obţinem că

[4] prelucrare a unei probleme a lui *Nicolae Papacu*

$(2m+1)^n-(2m-1)^n=2$ şi $(2m+1)^n+(2m-1)^n=2^{y-x}$. Însă $2=[(2m+1)-(2m-1)]\cdot[(2m+1)^{n-1}+\ldots+(2m-1)^{n-1}]$ duce la $n=1$, deci la $x=2$. Relaţia $(2m+1)^n+(2m-1)^n=2^{y-x}$ revine atunci la $p=4m=2^{y-2}$, deci, dacă $p=2^u$, atunci $y=u+2$.

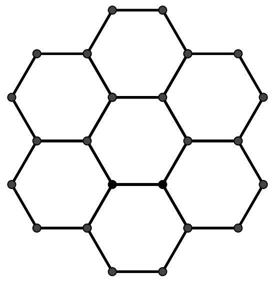
RMT 3/2017

OBJ.116. Arătaţi că există multipli ai lui 2017 care au suma cifrelor 2017.
(după o idee a lui *Dorel Miheţ*)

dr. RMT

Soluţia 1: Suma cifrelor lui 2017 este 10, iar suma cifrelor lui $2\cdot 2017=4034$ este 11. Dacă $n,\, k\in\mathbb{N}$ sunt astfel încât $10n+11k=2017$ (de exemplu se poate lua $n=194$ şi $k=7$), atunci numărul $20172017\ldots 201740344034\ldots 4034$ în care grupul 2017 este repetat de $n=194$ de ori, iar grupul 4034 de $k=7$ ori, are proprietăţile cerute: e divizibil cu 2017 (câtul împărţirii fiind $10010010\ldots 010020020\ldots 02$, cu n cifre de 1 şi k cifre de 2) şi are suma cifrelor $10n+11k=2017$.
Soluţia 2: Printre numerele $\{1, 10, 10^2, \ldots\}$ există 2017 numere care dau un acelaşi rest la împărţirea la 2017. Suma acestor 2017 numere va fi divizibilă cu 2017 şi va avea suma cifrelor 2017.

OBJ.117. Scrieţi pe cele şase laturi ale fiecăruia din cele şapte hexagoane din figura alăturată câte unul din numerele de la 1 la 6 astfel încât suma numerelor scrise pe laturile exterioare (cele care aparţin unui singur hexagon) să fie minimă.

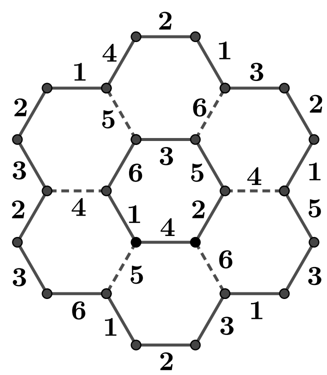


Paloma Dinculescu

Soluţie: Avem 18 laturi exterioare. Vom demonstra că fiecare număr apare pe laturile exterioare minim o dată şi maxim de 5 ori. Atunci suma minimă este cel puţin $5(1+2+3)+(4+5+6)=45$. În fine, vom ilustra printr-un exemplu de scriere a numerelor că minimul este într-adevăr 45.

• Numărul 1 trebuie să figureze pe una din laturile hexagonului central (interior). Ne uităm la hexagonul exterior care are drept latură comună cu hexagonul interior latura marcată cu 1. Numărul 1 nu poate apărea pe laturile exterioare ale acestui hexagon, deci poate apărea pe laturile exterioare a cel mult cinci dintre hexagoanele exterioare, adică de cel mult 5 ori. Analog pentru fiecare din numerele $2, 3, 4, 5, 6$, deci niciun număr nu poate apărea de mai mult de 5 ori pe laturile exterioare.

• Să presupunem că un număr $x\in\{1, 2, \ldots, 6\}$ nu ar fi scris pe niciuna din laturile exterioare. Notăm vârfurile hexagonul interior cu A, B, C, D, E, F astfel încât x să fie scris pe latura AB. Notăm cu ab hexagonul exterior care conţine latura AB, cu bc hexagonul exterior care conţine latura BC, etc. Ne uităm la laturile care unesc un vârf al hexagonului interior cu un vârf exterior (cele reprezentate punctat în figura alăturată). Cum hexagonul ab are x pe latura AB, pe segmentele care pleacă din A şi B sunt scrise numere diferite de x. Ne uităm la hexagonul bc: el trebuie să aibă x pe latura care pleacă din C. La fel, latura care pleacă din F trebuie să fie marcată cu x. Atunci hexagoanele cd şi ef au deja câte o latură marcată cu x, deci laturile care pleacă din D şi E nu sunt marcate cu x. Dar atunci niciuna din laturile hexagonului de nu este marcată cu x, contradicţie. Aşadar, fiecare număr trebuie să apară cel puţin o dată pe laturile exterioare.



• Figura de pe pagina precedentă oferă un exemplu de scriere a numerelor pe laturile hexagoanelor pentru care suma numerelor de pe laturile exterioare este 45. Acest exemplu dovedeşte că minimul căutat este 45.

OBJ.118. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătaţi că

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}+\frac{b^2-bc+c^2}{b+c}+\frac{c^2-ca+a^2}{c+a} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}.$$

Marian Cucoaneş

Soluţia 1: Scădem $\frac{a+b+c}{2}$ din ambii membri.

În membrul stâng vom avea $\sum\left(\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}-\frac{a+b}{4}\right)=\sum\frac{3(a-b)^2}{4(a+b)}$.

În membrul drept vom avea $\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}-\frac{a+b+c}{2}=\sum\frac{(a-b)^2}{2(a+b+c)}$.

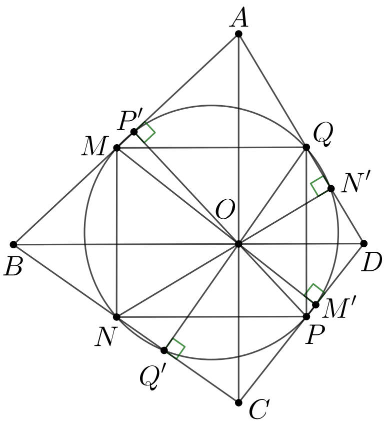
Vom demonstra că $\frac{3(a-b)^2}{4(a+b)} \geq \frac{(a-b)^2}{2(a+b+c)}$ şi analoagele. Este suficient ca $6(a+b+c) \geq 4(a+b)$, ceea ce este evident. Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c$.

Soluţia 2: Eliminând numitorii se ajunge la $[4,1,0]+3[3,2,0] \geq 4[2,2,1]$, ceea ce este evident din inegalitatea lui Muirhead.

OBJ.119. Fie $ABCD$ un patrulater convex şi ortodiagonal în care $\{O\}=AC \cap BD$. Notăm cu M, N, P şi Q punctele de intersecţie a laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[DA]$ cu perpendicularele duse din punctul O pe laturile patrulaterului $ABCD$ opuse lor. Arătaţi că patrulaterul $MNPQ$ este dreptunghi.

Mihai Miculiţa

Soluţie: Fie $\{M'\}=OM \cap CD$, $\{N'\}=ON \cap DA$, $\{P'\}=OP \cap AB$, $\{Q'\}=OQ \cap BC$. Vom arăta că punctele $M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ sunt conciclice. (Aceasta a fost concluzia unei probleme date la baraj în 2009.) Patrulaterul $MPM'P'$ este inscriptibil şi $m(\sphericalangle AMO)=m(\sphericalangle DPO)=270^\circ-m(\sphericalangle A)-m(\sphericalangle D)$. Şi patrulaterul $P'BQ'O$ este inscriptibil, deci $\sphericalangle P'Q'O \equiv \sphericalangle P'BO$. Analog, $\sphericalangle M'Q'O \equiv \sphericalangle M'CO$, deci $m(\sphericalangle P'Q'M')=m(\sphericalangle P'BO)+m(\sphericalangle M'CO)=90^\circ-m(\sphericalangle BAO)+90^\circ-m(\sphericalangle CDO)=270^\circ-m(\sphericalangle A)-m(\sphericalangle D)$. Rezultă că şi Q' aparţine cercului circumscris lui $MPM'P'$. Analog se arată că şi N' este pe acest cerc. Cu alte cuvinte, am arătat că M şi P se află pe cercul circumscris patrulaterului $M'N'P'Q'$ şi la fel se arată că şi punctele N şi Q se află pe acest cerc. În acest cerc segmentele $[MP]$ şi $[NQ]$ sunt diametre, deci M, N, P, Q sunt vârfurile unui dreptunghi.



Remarcă: Laturile dreptunghiului sunt paralele cu diagonalele AC şi BD. Într-adevăr, avem că $m(\sphericalangle ONP)=m(\sphericalangle N'NP)=m(\sphericalangle N'P'P)=m(\sphericalangle N'AO)=m(\sphericalangle N'OD)=m(\sphericalangle BON)$, de unde rezultă că $NP \parallel BD$. De aici rezultă că $MN \parallel AC$ (perpendiculare pe drepte paralele).

OBJ.120. Fie $a, b, c, d > 0$. Demonstraţi că

$$81(a^3+b^3+c^3+6)(b^3+c^3+d^3+6)(c^3+d^3+a^3+6)(d^3+a^3+b^3+6) \geq$$
$$(a+2)^3(b+2)^3(c+2)^3(d+2)^3.$$

Florin Rotaru

Soluţie: Din inegalitatea lui Hölder rezultă că $9(a^3+2)=(1+1+1)(1+1+1)(a^3+1+1)\geq (a+1+1)^3=(a+2)^3$ şi analoagele. Atunci, din inegalitatea mediilor, $9(a^3+b^3+c^3+6)=9[(a^3+2)+(b^3+2)+(c^3+2)]\geq (a+2)^3+(b+2)^3+(c+2)^3\geq 3(a+2)(b+2)(c+2)$. Aşadar $3(a^3+b^3+c^3+6)\geq (a+2)(b+2)(c+2)$. Înmulţind cu încă trei inegalităţi analoage obţinem inegalitatea din enunţ. Egalitate avem dacă şi numai dacă $a=b=c=d=1$.

OBJ.121. Determinaţi numerele reale pozitive x, y, z, t pentru care

$$(x+1)^3(y+1)^4(z+1)^5(t+1)^6=9\cdot 6^4 xyzt.$$

Mihaela Berindeanu

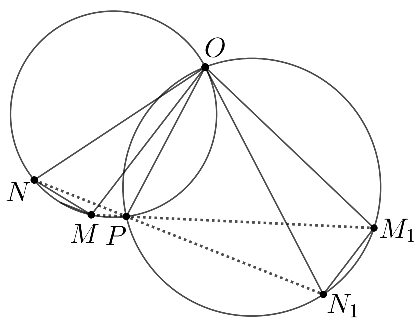
Soluţie: Din inegalitatea mediilor avem $x+1=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\geq 3\sqrt[3]{x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}$, adică $(x+1)^3\geq\frac{3^3}{2^2}\cdot x$. Analog, $y+1=y+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\geq 4\sqrt[4]{y\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}$, de unde $(y+1)^4\geq\frac{4^4}{3^3}\cdot y$, $z+1=z+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\geq 5\sqrt[5]{z\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}$, adică $(z+1)^5\geq\frac{5^5}{4^4}\cdot z$ şi $t+1=t+5\cdot\frac{1}{5}\geq 6\sqrt[6]{t\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5}$, de unde $(t+1)^6\geq\frac{6^6}{5^5}\cdot t$.
Înmulţind aceste inegalităţi obţinem $(x+1)^3(y+1)^4(z+1)^5(t+1)^6\geq 9\cdot 6^4xyzt$.
Egalitatea din enunţ este condiţia de egalitate în ultima inegalitate. Pentru a avea egalitate, trebuie să avem egalitate în fiecare din cele patru inegalităţi pe care le-am înmulţit, adică trebuie să avem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{4}$ şi $t=\frac{1}{5}$.

OBJ.122. Fie n un număr natural, $n\geq 3$, şi două poligoane inscriptibile asemenea $OA_1A_2\ldots A_n\sim OB_1B_2\ldots B_n$, notaţia realizându-se în acelaşi sens. Demonstraţi că dreptele A_iB_i, $i=\overline{1,n}$, sunt concurente.

Petru Braica

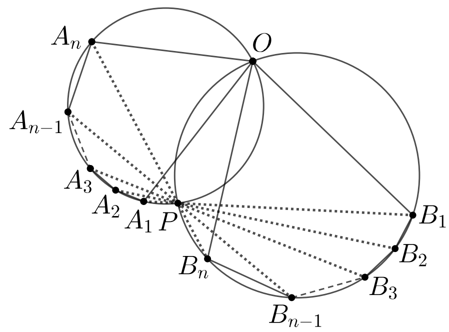
Soluţie: Vom demonstra mai întâi următoarea
Lemă: Dacă $\Delta OMN\sim\Delta OM_1N_1$, atunci dreptele MM_1 şi NN_1 se intersectează în cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise celor două triunghiuri.
Demonstraţie: Pentru a nu analiza prea multe cazuri, vom lucra cu unghiuri orientate.[5]

Vom nota cu $\measuredangle XYZ$ unghiul orientat XYZ. Este foarte convenabil să lucrăm cu unghiuri orientate datorită următoarelor fapte:
1. patru puncte, A, B, C, D, nicicare trei coliniare, sunt conciclice dacă şi numai dacă $\measuredangle ABC=\measuredangle ADC$;
2. trei puncte, A, B, C sunt coliniare dacă şi numai dacă $\measuredangle XAB=\measuredangle XAC$, unde X este un punct oarecare.
Fie P cel de-al doilea punct de intersecţie a celor două cercuri. Atunci avem: $\measuredangle OPM=\measuredangle ONM=\measuredangle ON_1M_1=\measuredangle OPM_1$, deci punctele P, M şi M_1 sunt coliniare. La fel pentru punctele P, N şi N_1. Lema este astfel demonstrată.



[5] a se vedea de pildă articolul lui Evan Chen http://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf

Fie P al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise celor două poligoane. Deoarece $\Delta\, OA_1A_j \sim \Delta\, OB_1B_j$, $\forall\, j = \overline{2,n}$, avem, conform lemei, că $P \in A_1B_1 \cap A_jB_j$, $\forall\, j = \overline{2,n}$, adică $P \in A_jB_j$, $\forall\, j = \overline{1,n}$.



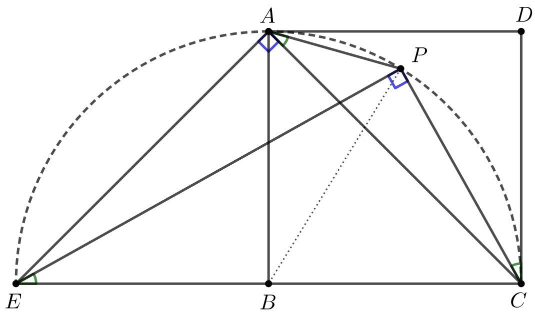
RMT 4/2017

OBJ.123. În interiorul unui pătrat $ABCD$ de latură 1 se consideră un punct P astfel încât $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PCD$. Aflaţi BP.

* * *

Soluţia 1: CD şi AD sunt tangente cercului circumscris triunghiului ACP, deci centrul acestuia este B. Atunci $BP = 1$.

Soluţia 2: (*Marian Daniel Vasile*) Fie E simetricul lui C faţă de B. Atunci $m(\sphericalangle CEA) = 45°$, iar $m(\sphericalangle CPA) = 180° - m(\sphericalangle PAC) - m(\sphericalangle PCA) = 180° - m(\sphericalangle PCD) - m(\sphericalangle PCA) = 135°$, deci patrulaterul $PCEA$ este inscriptibil. Deducem că $m(\sphericalangle CPE) = m(\sphericalangle CAE) = 90°$, deci PB, fiind mediană în triunghiul dreptunghic PCE, are lungimea 1.



OBJ.124. O sută de cutii sunt numerotate de la 1 la 100. Numerele bilelor din oricare două cutii numerotate cu numere consecutive diferă prin 1. Cutiile numerotate cu numerele 1, 4, 7, 10, ..., 100 conţin, în total, 289 de bile. Care este numărul maxim de bile din cele 100 de cutii? (prelucrare a problemei 4 de la ONM 2014, clasa a V-a)

Andrei Eckstein

Soluţie: Fie x_k numărul de bile din cutia cu numărul k.
Ştim că $x_{3k} \leq x_{3k+1} + 1$, $\forall\, k = \overline{1,33}$ şi că $x_{3k+2} \leq x_{3k+1} + 1$, $\forall\, k = \overline{0,32}$. Adunând toate aceste relaţii, obţinem că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 2x_1 + 3x_4 + 3x_7 + \ldots + 3x_{97} + 2x_{100} + 66 = 3 \cdot 289 - (x_1 + x_{100}) + 66$. Cum paritatea numărului de bile din două cutii vecine este diferită, parităţile alternează, deci x_1 şi x_{100} au parităţi diferite. Valoarea minimă a sumei $x_1 + x_{100}$ este $0 + 1 = 1$. Aşadar, am obţinut că $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 3 \cdot 289 - 1 + 66 = 932$.
Acest maxim se atinge dacă şi numai dacă avem egalitate în toate inegalităţile adunate, adică dacă avem: $x_1 + x_{100} = 1$, $x_{3k} = x_{3k+1} + 1$, $\forall\, k = \overline{1,33}$ şi $x_{3k+2} = x_{3k+1} + 1$, $\forall\, k = \overline{0,32}$. Dacă presupunem $x_0 = 0$, $x_{100} = 1$, suntem conduşi la următorul exemplu de plasare a bilelor care

arată că totalul de 932 de bile chiar se poate atinge:
$\underline{0}$,1,2,$\underline{1}$,2,3,$\underline{2}$,3,4,$\underline{3}$,4,5,...,$\underline{15}$,16,17,$\underline{16}$,17,18,$\underline{17}$,18,17,$\underline{16}$,17,16,$\underline{15}$,...,4,3,$\underline{2}$,3,2,$\underline{1}$
Suma numerelor subliniate este $x_1 + x_4 + \ldots + x_{100} = 0 + 1 + \ldots + 17 + 16 + 15 + \ldots + 1 = 17 + 2(1 + 2 + \ldots + 16) = 17 + 16 \cdot 17 = 17^2 = 289$.

OBJ.125. Fie $a, b, c, d > 0$ cu proprietatea că $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$. Arătaţi că $ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 6$.

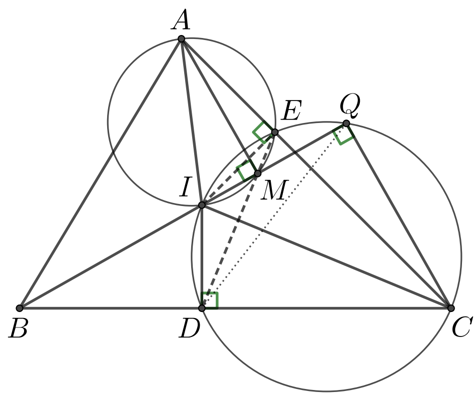
Marian Cucoaneş

Soluţia 1: (a autorului) Avem $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ şi $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{c+d}$, deci $a+b+c+d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c+d} = \frac{4(a+b+c+d)}{(a+b)(c+d)}$, de unde $(a+b)(c+d) \geq 4$. Analog, $(a+c)(b+d) \geq 4$ şi $(a+d)(b+c) \geq 4$. Prin adunare, rezultă concluzia.
Soluţia 2: Condiţia se scrie echivalent $abcd(a+b+c+d) = abc + abd + acd + bcd$. Vom demonstra că $(ab+ac+ad+bc+bd+cd)(abc+abd+acd+bcd) \geq 6abcd(a+b+c+d)$. Desfăcând parantezele ajungem la $[2, 2, 1, 0] \geq [2, 1, 1, 1]$, care e evidentă. Asta iese şi din medii: $a^2b^2c + a^2d^2c \geq 2a^2bcd$ şi analoagele conduc la concluzie.
Remarcă: La fel ca la soluţia 2 se poate demonstra următoarea extindere la n variabile: dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ au suma egală cu suma inverselor lor, atunci $\sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \geq \frac{n(n-1)}{2}$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$.

OBJ.126. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul neisoscel ABC. Notăm cu M şi Q proiecţiile vârfurilor A şi C pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$, iar cu D proiecţia punctului I pe latura $[BC]$. Arătaţi că centrul cercului circumscris triunghiului DMQ se găseşte pe dreapta BC.

Mihai Miculiţa şi Titu Zvonaru

Soluţie: Fie E proiecţia lui I pe AC şi $\{M'\} = BI \cap DE$. Atunci, din triunghiul ABI, $m(\sphericalangle M'IA) = \frac{1}{2}(m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B)) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle CEM')$, deci patrulaterul $AIM'E$ este inscriptibil. Rezultă că $m(\sphericalangle AM'I) = m(\sphericalangle AEI) = 90^\circ$, deci M' coincide cu M. Punctele D, E, Q se găsesc pe cercul de diametru $[CI]$, deci $\sphericalangle IDM \equiv \sphericalangle ICE \equiv \sphericalangle ICD \equiv \sphericalangle IQD$, ceea ce arată că ID este tangentă cercului circumscris triunghiului DMQ. Cum $BC \perp ID$, centrul cercului circumscris lui DMQ se găseşte pe dreapta BC.



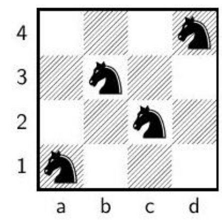
OBJ.127. Determinaţi numerele naturale n pentru care există $m \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că pe o tablă de şah 8×8 se pot aşeza m cai astfel încât fiecare cal să atace exact n cai.

Alexandru Mihalcu

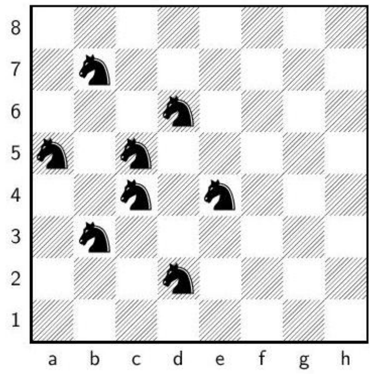
Soluţie: Demonstrăm că pentru $n \geq 5$ nu există o configuraţie de cai astfel încât fiecare cal să fie atacat de exact alţi n cai. Ne uităm la contur. Orice cal ce ar fi plasat pe conturul tablei de şah poate fi atacat maxim de alţi $4 < n$ cai. Prin urmare, dacă o astfel de configuraţie ar fi posibilă, niciun cal nu ar fi plasat pe conturul tablei de şah. Mai mult, putem chiar să eliminăm conturul tablei, obţinând astfel un pătrat 6×6. Putem însă repeta procedeul, micşorând succesiv dimensiunile pătratului. (Un raţionament analog se poate face demonstrând că nu există cal pe

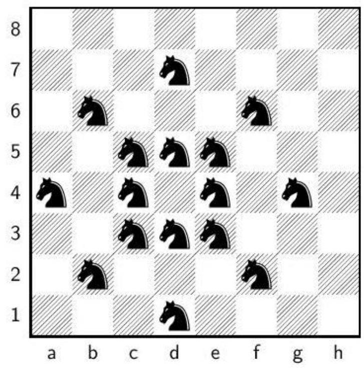
latura cea mai de sus, suprimând acea latură şi repetând succesiv argumentul.)
Arătăm în continuare, prin câte un exemplu, că există configuraţii posibile pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pentru $n = 0$, putem plasa un cal oriunde pe tablă, iar pentru $n = 1$, putem plasa o pereche de cai care se atacă reciproc.

Pentru $n = 2$ sunt mai multe configuraţii simple: 4 cai în vârfurile unui pătrat (de exemplu, cu numerotarea standard de la şah a pătrăţelelor, cu caii în a2, b4, c1, d3), 4 cai în vârfurile unui romb (ca în figura alăturată) sau 8 cai dispuşi în pătrăţelele unui pătrat 3×3 cu excepţia pătrăţelului din centru.



Pentru $n = 3$ vă prezentăm (în figura din stânga) un exemplu cu 8 cai, dar există şi exemplu cu 12 cai (a5, b3, b7, c6, d2, d4, d6, d8, e4, f3, f7, g5).
Pentru $n = 4$ există o singură configuraţie (se poate translata în 4 poziţii de pe tablă), a se vedea figura din dreapta.





OBJ.128. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $7a^2 + 34b^2 = 2017c^2$.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Dacă (x, y, z) este soluţie a ecuaţiei, atunci şi $(|x|, |y|, |z|)$ este soluţie. Observăm că $x = y = z = 0$ este soluţie a ecuaţiei. Arătăm că este unica soluţie. Presupunând contrariul, considerăm acea soluţie $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$, $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, pentru care $x + y + z$ este minimă. Ecuaţia se scrie $7a^2 + 35b^2 - 2016c^2 = b^2 + c^2$, sau $7(a^2 + 5b^2 - 288c^2) = b^2 + c^2$. Se ştie că dacă un număr prim de forma $4k + 3$ divide o sumă de două pătrate, atunci el divide fiecare dintre numere. Rezultă că $7 \mid b$ şi $7 \mid c$. (Se poate verifica şi direct, arătând că un pătrat perfect dă unul din resturile 0, 1, 2 sau 4 la împărţirea cu 7.) Atunci $49 \mid b^2$ şi $49 \mid c^2$, deci $49 \mid 2017c^2 - 34b^2$, adică $7 \mid a^2$, deci $7 \mid a$. Fie $x = 7x'$, $y = 7y'$, $z = 7z'$, $x', y', z' \in \mathbb{N}$. Atunci $7x^2 + 34y^2 = 2017z^2$ implică $7(z')^2 + 34(y')^2 = 2017(z')^2$, deci (x', y', z') este soluţie a ecuaţiei din enunţ. În plus, $x' + y' + z' = \dfrac{x + y + z}{7} < x + y + z$, ceea ce contrazice alegerea soluţiei (x, y, z) ca fiind cea cu suma componentelor minimă. În concluzie, $a = b = c = 0$ este unica soluţie.

OBJ.129. Fie ABC un triunghi în care M, N, P sunt mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$. Notăm cu D, E, F punctele în care dreptele AM, BN, respectiv CP intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că

$$(AM + BN + CP)(DM + EN + FP) \geq p^2,$$

unde p este semiperimetrul triunghiului ABC.

Cătălin Cristea

Soluţie: Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC, R raza acestui cerc, $a = BC$,

$b = CA$, $c = AB$. Folosind puterea punctului M faţă de cercul circumscris triunghiului ABC avem: $AM \cdot DM = R^2 - OM^2 = \dfrac{a^2}{4}$, de unde $DM = \dfrac{a^2}{4 \cdot AM}$. Analog $EN = \dfrac{b^2}{4 \cdot BN}$ şi $FP = \dfrac{c^2}{4 \cdot CP}$. Obţinem

$$DM + EN + FP = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a^2}{AM} + \frac{b^2}{BN} + \frac{c^2}{CP} \right) \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{AM + BN + CP} = \frac{p^2}{AM + BN + CP},$$

de unde $(AM + BN + CP) \cdot (DM + EN + FP) \geq p^2$.

Remarcă: (*Vlad Vergelea*) Folosind formula pentru lungimea medianei şi apoi puterea punctelor M, N, P faţă de cercul circumscris triunghiului, se poate arăta că tripletele (AM, BN, CP) şi (BC, CA, AB) sunt invers ordonate şi că tripletele (AM, BN, CP) şi (DM, EN, FP) sunt şi ele invers ordonate. Din inegalitatea lui Cebâşev rezultă atunci că $(AM{+}BN{+}CP)(DM{+}EN{+}FP) \geq 3(AM \cdot MD + BN \cdot NE + CP \cdot PF) = \dfrac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$, care este o inegalitate mai tare decât cea din enunţ deoarece $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

RMT 1/2018

OBJ.130. În câte moduri putem aşeza pe un rând $k \geq 12$ numere din mulţimea $\{-1, 1\}$ astfel încât produsul oricăror 10 numere consecutive să fie 1, iar produsul oricăror 12 numere consecutive să fie -1?

Dorel Miheţ (Concursul Teodor Topan, 2017)

Soluţie: Observăm mai întâi că numerele aşezate în rând se repetă din 10 în 10. Într-adevăr, dacă între două numere, a şi b, se află exact 9 alte numere, notând produsul acestor 9 numere cu p, trebuie să avem $ap = 1$ şi $bp = 1$, de unde rezultă că $a = b$. Analog se arată că numerele se repetă din 12 în 12 (dacă $k > 12$).

Ne uităm acum la o pereche formată din două numere aşezate unul după altul în rând, c şi d. Dacă în stânga lor sau în dreapta lor există un grup format din 10 numere, produsul celor 10 numere fiind 1, rezultă că $cd = -1$, adică $d = -c$. Deducem că, începând de la al 11-lea, numerele din rând sunt alternativ 1 şi -1. Acest lucru este valabil şi când rândul este parcurs de la stânga la dreapta, şi de la dreapta la stânga.

Conchidem că, dacă $k \geq 20$, atunci trebuie ca toate numerele din rând să fie alternativ 1 şi -1, dar atunci produsul primelor 10 numere din rând este -1, ceea ce nu convine. Aşadar, nu putem aşeza pe un rând $k \geq 20$ numere din mulţimea $\{-1, 1\}$ astfel încât produsul oricăror 10 numere consecutive să fie 1, iar produsul oricăror 12 numere consecutive să fie -1.

Pentru $12 \leq k \leq 19$, din cele de mai sus rezultă numerele trebuie să fie dispuse astfel:

$$\underbrace{\pm1, \mp1, \pm1, \mp1, \ldots,}_{k-10 \text{ numere}} \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{20-k \text{ numere}} \underbrace{\pm1, \mp1, \pm1, \mp1, \ldots,}_{k-10 \text{ numere}}.$$

Dacă notăm cu p_1 produsul primelor $k - 10$ numere din rând şi cu p_2 produsul următoarelor $20 - k$ numere, trebuie să avem $p_1 p_2 = 1$. Aşadar, odată ales primul număr din rând, produsul numerelor din grupul mijlociu, p_2, este unic determinat.

Avem două moduri de a alege primul număr din rând şi tot câte două moduri de a alege fiecare din primele $19 - k$ numere din grupul central de $20 - k$ numere. Ultimul număr din acest grup este unic determinat din condiţia ca produsul numerelor din acest grup să fie p_2. Obţinem aşadar 2^{20-k} moduri de a aşeza pe un rând $12 \leq k \leq 19$ numere din mulţimea $\{-1, 1\}$ astfel încât produsul oricăror 10 numere consecutive să fie 1, iar produsul oricăror 12 numere consecutive să fie -1.

OBJ.131. Determinaţi numerele reale pozitive a, b, c, d astfel încât $a^3b + b^3c + c^3d + d^3a = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$ şi $abcd = 1$.

Carmen-Victoriţa Chirfot

Soluţia 1: (*Vlad Vergelea, Marian Daniel Vasile*)
Fie $a = x^4$, $b = y^4$, $c = z^4$, $d = t^4$, unde $x, y, z, t > 0$. Din $abcd = 1$ rezultă $xyzt = 1$, iar condiţia $a^3b + b^3c + c^3d + d^3a = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$ se traduce prin $\sum_{cyc} x^{12}y^4 = \sum_{cyc} x^8y^4 = \sum_{cyc} x^9y^5zt$.

Vom demonstra că $\sum_{cyc} x^{12}y^4 \geq \sum_{cyc} x^9y^5zt$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y = z = t$. Cum ipoteza arată că ne aflăm în cazul de egalitate, rezultă că $x = y = z = t = 1$, adică $a = b = c = d = 1$. Să demonstrăm acum inegalitatea de mai sus. Vom folosi o „spargere cu medii" (a se vedea capitolul omonim din cartea lui M. O. Drîmbe - Inegalităţi. Idei şi metode). Căutăm „ponderile" $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$, cu $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$, pentru care inegalitatea $\alpha x^{12}y^4 + \beta y^{12}z^4 + \gamma z^{12}t^4 + \delta t^{12}x^4 \geq x^9y^5zt$ să reprezinte inegalitatea mediilor ponderată, adică să fie îndeplinite relaţiile $\begin{cases} 12\alpha + 4\delta = 9 \\ 12\beta + 4\alpha = 5 \\ 12\gamma + 4\beta = 1 \\ 12\delta + 4\gamma = 1. \end{cases}$ Rezolvând acest sistem, se găsesc $\alpha = \frac{29}{40}$, $\beta = \frac{7}{40}$, $\gamma = \frac{1}{40}$, $t = \frac{3}{40}$.

Să remarcăm că soluţia găsită îndeplineşte $\alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0$ şi $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$. Scriind şi relaţiile similare şi adunând obţinem inegalitatea pe care doream s-o demonstrăm.

Soluţia 2: Din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu), avem că
$a^3b + b^3c + c^3d + d^3a = \frac{(a^2b)^2}{ab} + \frac{(b^2c)^2}{bc} + \frac{(c^2d)^2}{cd} + \frac{(d^2a)^2}{da} \geq \frac{(a^2b + b^2c + c^2d + d^2a)^2}{ab + bc + cd + da}$.

Ţinând seama de egalitatea $a^3b + b^3c + c^3d + d^3a = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$, inegalitatea de mai sus revine la $ab + bc + cd + da \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$.

Tot din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu), avem că $ab + bc + cd + da \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a = \frac{(ab)^2}{b} + \frac{(bc)^2}{c} + \frac{(cd)^2}{d} + \frac{(da)^2}{a} \geq \frac{(ab + bc + cd + da)^2}{b + c + d + a}$, de unde $a + b + c + d \geq ab + bc + cd + da$.

În fine, tot din inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu), avem că $a^3b + b^3c + c^3d + d^3a = \frac{a^3b + b^3c + c^3d + d^3a}{abcd} = \frac{a^2}{cd} + \frac{b^2}{da} + \frac{c^2}{ab} + \frac{d^2}{bc} \geq \frac{(a + b + c + d)^2}{ab + bc + cd + da} \geq a + b + c + d$.

Am arătat aşadar că $a^2b + b^2c + c^2d + d^2a \geq a + b + c + d \geq ab + bc + cd + da \geq a^2b + b^2c + c^2d + d^2a$, deci trebuie să avem egalitate în toate inegalităţile de mai sus. Dar atunci $0 = a^2b + b^2c + c^2d + d^2a - 2(ab + bc + cd + da) + (a + b + c + d) = b(a - 1)^2 + c(b - 1)^2 + d(c - 1)^2 + a(d - 1)^2$, de unde $a = b = c = d = 1$, numere care verifică într-adevăr relaţiile date.

OBJ.132. Fie $a, b, c, d \in (0, \infty)$ cu $a + b + c + d = 1$. Arătaţi că

$$\frac{a}{b+1} + \frac{b}{c+1} + \frac{c}{d+1} + \frac{d}{a+1} \geq \frac{4}{5}.$$

Marian Cucoaneş

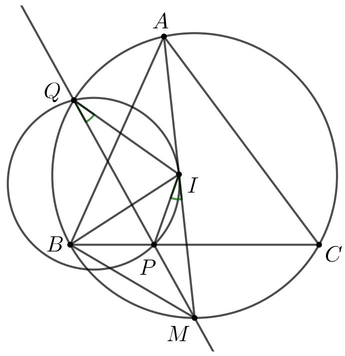
Soluţie: Cu inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz şi inegalitatea mediilor avem $\frac{a}{b+1} +$

$\dfrac{b}{c+1}+\dfrac{c}{d+1}+\dfrac{d}{a+1}=\dfrac{a^2}{ab+a}+\dfrac{b^2}{bc+b}+\dfrac{c^2}{cd+c}+\dfrac{d^2}{da+d}\geq\dfrac{(a+b+c+d)^2}{ab+bc+cd+da+a+b+c+d}=$ $\dfrac{1}{(a+c)(b+d)+1}\geq\dfrac{1}{\left(\dfrac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2+1}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}+1}=\dfrac{4}{5}$. Egalitatea are loc dacă $\dfrac{a}{ab+a}=$ $\dfrac{b}{bc+b}=\dfrac{c}{cd+c}=\dfrac{d}{da+d}$ şi $a+c=b+d$, adică pentru $a=b=c=d=\dfrac{1}{4}$.

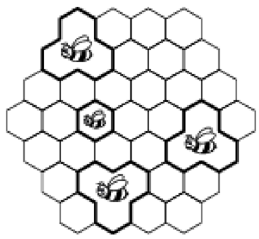
OBJ.133. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Dreapta AI intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul M. O dreaptă oarecare care trece prin M intersectează dreapta BC în punctul P şi cercul circumscris triunghiului ABC în punctul Q. Demonstraţi că dreapta AM este tangentă cercului circumscris triunghiului IPQ.

Titu Zvonaru

Soluţie: Deoarece $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MQB$, triunghiurile MBP şi MQB sunt asemenea, deci $\dfrac{MB}{MQ}=\dfrac{MP}{MB}$, adică $MB^2=MP\cdot MQ$. Dar $MB=MI$ (proprietate cunoscută; se demonstrează uşor prin calcul că $m(\sphericalangle MBI)=m(\sphericalangle MIB)$), deci $MI^2=MP\cdot MQ$. Din reciproca teoremei puterii punctului rezultă că MI este tangentă cercului circumscris triunghiului IPQ.

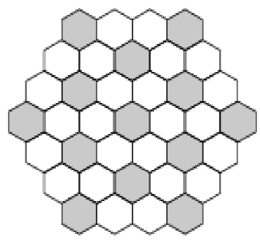


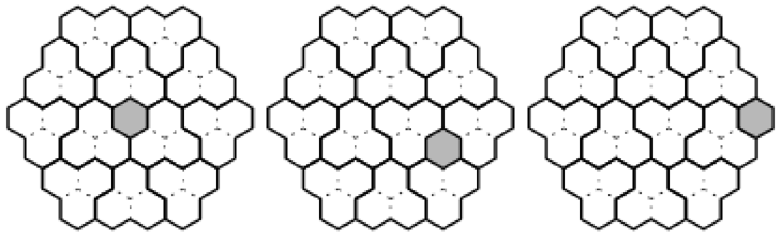
OBJ.134. Treisprezece albine, una mică şi douăsprezece mari, locuiesc într-un fagure format din 37 de celule hexagonale. Fiecare albină mare ocupă trei celule vecine (hexagoane care au un punct comun), iar albina mică ocupă exact o celulă (vezi figura). În câte moduri putem împărţi fagurele în 13 sectoare disjuncte astfel încât cele 13 albine să poată fi aşezate în fagure respectând regulile de mai sus?



Concursul Náboj, 2016

Soluţie: Să considerăm cele 13 celule gri din figura alăturată. Fiecare sector constând din 3 celule „vecine” conţine exact o celulă gri, deci albina mică trebuie să ocupe una din celulele gri. Dacă albina mică stă în celula din centru, analizând diversele moduri de a împărţi restul fagurelui în 12 sectoare, se găsesc două împărţiri, cea din figura din stânga de mai jos şi rotita acesteia cu 60° în jurul originii (în oricare din sensuri). Dacă albina mică stă într-una din cele 6 celule „de la mijloc”, atunci, pentru fiecare din cele 6 alegeri ale celulei ocupate de albina mică, restul fagurelui se poate împărţi într-un singur mod în 12 sectoare: cel din figura din mijloc de mai jos şi altele 5 analoage. În fine, dacă albina mică stă într-una din cele 6 celule de la marginea fagurelui, restul fagurelui poate fi împărţit în două moduri în 12 sectoare (cel din dreapta în figura de mai jos precum şi simetricul acestuia). În total sunt aşadar $1\cdot2+6\cdot1+6\cdot2=20$ moduri de a împărţi fagurele.

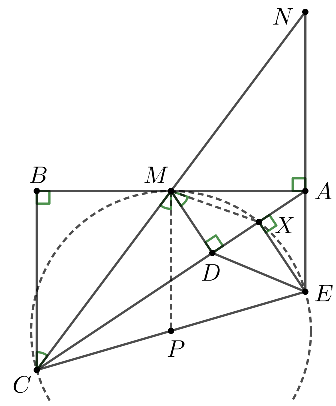




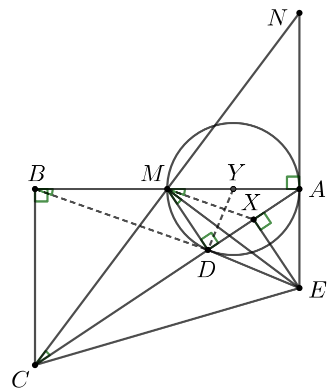
OBJ.135. Fie ABC un triunghi dreptunghic în B, M mijlocul catetei AB, iar D proiecţia lui M pe AC. În exteriorul triunghiului ABC se construieşte triunghiul ADE, isoscel de bază $[AD]$, astfel încât $EA \perp AB$. Dacă $\{N\} = CM \cap EA$, demonstraţi că $EN = EC$.

Petru Braica

Soluţia 1: Fie X şi P mijloacele segmentelor $[AD]$, respectiv $[CE]$. Triunghiurile ABC şi ADM sunt asemenea (UU), deci $\dfrac{BC}{DM} = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AB/2}{AD/2} = \dfrac{BM}{DX}$, deci şi triunghiurile BCM şi DMX sunt asemenea. Rezultă că $\sphericalangle DMX \equiv \sphericalangle BCM$. Dar $[MP]$ este linie mijlocie în trapezul $ABCE$, deci $MP \parallel BC$, de unde $\sphericalangle BCM \equiv \sphericalangle CMP$. Aşadar $\sphericalangle DMX \equiv \sphericalangle PMC$, adică semidreptele $(MD$ şi $(MP$ sunt izogonale în unghiul $\sphericalangle XMC$. Cum MD este înălţime în triunghiul XMC, centrul cercului circumscris acestuia se află pe izogonala înălţimii, deci pe $(MP$. Triunghiul CXE fiind dreptunghic, avem $PC = PX$, deci P se află pe mediatoarea segmentului $[XC]$, rezultă că P este centrul cercului circumscris triunghiului CMX, deci $PM = PC = PE = PX$, adică triunghiul CME este dreptunghic în M. Pe de altă parte, din $\Delta\, BCM \equiv \Delta\, ANM$ rezultă $CM = MN$, deci $[EM]$ este mediană şi înălţime în triunghiul CEN, de unde rezultă că $EN = EC$.



Soluţia 2: Fie X şi Y mijloacele segmentelor $[AD]$, respectiv $[AM]$. Atunci $\Delta\, EDY \equiv \Delta\, EAY$ (LLL), deci $m(\sphericalangle EDY) = 90^\circ$. Deducem că EA şi ED sunt tangente cercului circumscris triunghiului ADM, ori se ştie că această proprietate arată că ME este dreapta suport a simedianei din M a triunghiului ADM. Deducem că $m(\sphericalangle DME) = m(\sphericalangle AMX)$. Dar $MX \parallel BD$ şi patrulaterul $BCDM$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle DME) = m(\sphericalangle AMX) = m(\sphericalangle ABD) = m(\sphericalangle DCM) = 90^\circ - m(\sphericalangle CMD)$, deci $m(\sphericalangle CME) = 90^\circ$. Ca mai sus se arată că $[EM]$ este şi mediană în triunghiul ECN, de unde concluzia.



Soluţia 3: Dacă $ab = 2a$ şi $m(\sphericalangle XEA) = m(\sphericalangle BAC) = \alpha$, atunci $BC = 2a\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $AD = a\cos\alpha$, $AE = \dfrac{AD}{2\sin\alpha} = \dfrac{a}{2\mathrm{tg}\,\alpha}$, deci $\dfrac{BC}{AM} = 2\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{BM}{AE}$, deci $\Delta\, BCM \sim \Delta\, AME$. Rezultă că $m(\sphericalangle AME) = m(\sphericalangle BCM) = 90^\circ - m(\sphericalangle BMC)$, de unde $CM \perp ME$. De aici se finalizează ca în soluţiile de mai sus.

OBJ.136. Arătaţi că dacă numerele naturale x şi y au proprietatea că $(ax+by)^2+(bx+ay)^2$ este divizibil cu $a+b$ pentru orice $a,b\in\mathbb{N}^*$, atunci $x=y$.

Andrei Eckstein

Soluţie: Alegând $a=1$, $b=p-1$, unde p este un număr prim arbitrar, obţinem că $x^2+2(p-1)xy+(p-1)^2y^2+y^2+2(p-1)xy+(p-1)^2x^2$ este divizibil cu p. Deducem că $2(x^2-2xy+y^2)$ este divizibil cu p. De aici rezultă că $2(x-y)^2$ este divizibil cu orice număr prim, prin urmare $2(x-y)^2=0$, adică $x=y$.

OBJ.137. Fie $a,b,c\in(0,1]$ astfel încât $ab+bc+ca+1=a+b+c+2abc$. Demonstraţi inegalitatea
$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geq 2(a+b+c).$$
În ce caz avem egalitate?

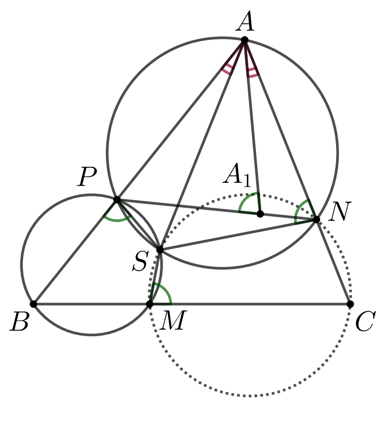
Mircea Lascu

Soluţie: Condiţia din enunţ se transcrie $abc=(1-a)(1-b)(1-c)$. Ţinând cont de inegalitatea $x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ oricare ar fi x real deducem că $a^2b^2c^2=a(1-a)b(1-b)c(1-c)\leq\frac{1}{64}$, de unde rezultă că $abc\leq\frac{1}{8}$. Ţinând cont de această inegalitate, avem succesiv: $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\geq 2(a+b+c)$.
Avem egalitate dacă şi numai dacă $a=b=c=\frac{1}{2}$.
Inegalitatea $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\geq\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ este cunoscută. Ea îi aparţine lui Šefket Arslanagić şi se poate demonstra astfel: $\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{c}\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$. Adunând cu două relaţii analoage şi împărţind cu 3 obţinem inegalitatea dorită.

OBJ.138. Fie ABC un triunghi oarecare şi trei puncte arbitrare $M\in[BC]$, $N\in[AC]$, $P\in[AB]$.
a) Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor ANP, BMP şi CMN au un punct comun, S.
b) Dacă $A_1\in[NP]$, $B_1\in[PM]$, $C_1\in[MN]$ sunt astfel încât $\sphericalangle AA_1P\equiv\sphericalangle BB_1M\equiv\sphericalangle CC_1N\equiv\sphericalangle ANS$, atunci dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Petru Braica şi Mihai Miculiţa

Soluţie: **a)** Notând cu S cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor APN şi BMP, avem: $APSN$ inscriptibil implică $\sphericalangle ANS\equiv\sphericalangle BPS$, iar $PBMS$ inscriptibil implică $\sphericalangle BPS\equiv\sphericalangle SMC$. Deducem că $\sphericalangle ANS\equiv\sphericalangle SMC$, ceea ce arată că patrulaterul $SMCN$ este, şi el, inscriptibil. (Punctul **a)** poartă numele de *teorema lui Miquel*).



b) Avem $m(\sphericalangle A_1AN)=m(\sphericalangle AA_1P)-m(\sphericalangle ANP)=m(\sphericalangle ANS)-m(\sphericalangle ANP)=m(\sphericalangle PNS)=m(\sphericalangle PAS)$, deci $(AA_1$ este izogonala lui $(AS$ în triunghiul ABC. În mod analog se arată că perechile de drepte (BB_1,BS) şi (CC_1,CS) sunt izogonale, aşa că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente în izogonalul punctului S în triunghiul ABC. (Acest rezultat este cunoscut; el rezultă imediat aplicând forma trigonometrică a teoremei lui Ceva.)

OBJ.139. Fie a,b,c numere rele pozitive astfel încât $abc=1$. Arătaţi că
$$a^3+b^3+c^3+\frac{64}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 11.$$

Titu Zvonaru

Soluţia 1: (*Vlad Vergelea şi Marius Olteanu*) Fie $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ şi $r = abc = 1$. Atunci $a^3+b^3+c^3 = p^3-3pq+3r$, $(a+b)(b+c)(c+a) = pq-r$, iar inegalitatea de demonstrat se scrie $\dfrac{p^3-3pq+3r}{r} + \dfrac{64r}{pq-r} \geq 11$, adică $\dfrac{p^3-3pq}{r} \geq \dfrac{8pq-72r}{pq-r}$. Eliminând numitorii, ajungem la $(p^3-3pq)(pq-r) \geq 8r(pq-9r)$. Dar $pq \geq 9r$ rezultă din inegalitatea mediilor, prin urmare $pq-r \geq 8r$. Pe de altă parte, $p^3-3pq \geq pq-9r$ este inegalitatea lui Schur, astfel că inegalitatea de demonstrat se verifică. Egalitate avem dacă $a = b = c = 1$.

Soluţia 2: (*Titu Zvonaru*) Deoarece $abc = 1$, inegalitatea se scrie succesiv $a^3+b^3+c^3-3abc \geq 8-\dfrac{64}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, apoi $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geq \dfrac{8[(a+b)(b+c)(c+a)-8abc]}{(a+b)(b+c)(c+a)}$, sau $\sum\dfrac{(a+b+c)(a-b)^2}{2} \geq \sum\dfrac{8c(a-b)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$. Cum $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ (rezultă din înmulţirea inegalităţii $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ cu analoagele), este suficient să demonstrăm că $\sum\dfrac{(a+b+c)(a-b)^2}{2} \geq \sum c(a-b)^2$, adică $(b+c-a)(b-c)^2+(c+a-b)(c-a)^2+(a+b-c)(a-b)^2 \geq 0$. Această inegalitate se rescrie $2(a^3+b^3+c^3)+6abc \geq 2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)$ şi este inegalitatea lui Schur.

OBJ.140. Într-un rând stau aliniaţi 2^n soldaţi. Soldaţii se pot rearanja într-o nouă linie doar în modul următor: soldaţii care stau pe poziţii impare se pun la începutul rândului păstrând ordinea dintre ei, iar soldaţii care iniţial stăteau pe poziţii pare se repoziţionează la sfârşitul liniei, păstrând ordinea dintre ei. De exemplu, pentru $n = 3$, soldaţii aflaţi iniţial în configuraţia 12345678 se repoziţionează în ordinea 13572468. Demonstraţi că după n asemenea rearanjări soldaţii vor sta în aceeaşi ordine ca la început.

Olimpiadă Estonia

Soluţie: Numerotăm soldaţii de la 0 la 2^n-1 şi le punem în corespondenţă reprezentarea în baza doi completată cu 0-uri în faţă astfel încât fiecărei poziţii să îi corespundă un cod format din n cifre de 0 sau 1. De exemplu, pentru $n = 3$ avem codurile 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. După rearanjare, soldaţii stau într-o poziţie al cărei cod se obţine mutând ultima cifră pe post de prima (şi lăsând celelalte cifre nemodificate şi în aceeaşi ordine). Astfel este evident că după n rearanjări fiecare soldat va avea din nou codul iniţial, adică va reveni în poziţia iniţială.

OBJ.141. Fie n un număr natural nenul şi x şi y două numere naturale astfel încât $x+y = 10^n$. Arătaţi că dacă numerele x şi y au exact aceleaşi cifre doar că în ordine diferită, atunci x şi y sunt multipli de 5.

dr RMT

Soluţie: Cele două numere trebuie să aibă câte n cifre. Dacă $x = \overline{x_1x_2\ldots x_n}$, iar $y = \overline{y_1y_2\ldots y_n}$, atunci trebuie ca x_n+y_n să fie egal cu 0 sau cu 10. În primul caz rezultă $x_n = y_n = 0$ deci x şi y sunt multipli de 5. Să examinăm cel de-al doilea caz. Dacă $x_n+y_n = 10$ atunci avem trecere peste ordin, deci trebuie ca $x_{n-1}+y_{n-1} = 9$. Dar atunci la adunarea cifrei zecilor avem din nou trecere peste ordin, deci trebuie ca $x_{n-2}+y_{n-2} = 9$ şi aşa mai departe până la $x_1+y_1 = 9$. Pentru fiecare pereche (x_k, y_k) cu $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, cifrele x_k şi y_k trebuie să mai apară undeva, printre y_i-uri, respectiv x_i-uri. Nu pot fi ambele y_n, respectiv x_n pentru că $x_k+y_k = 9$, iar $x_n+y_n = 10$. Aşadar una din ele apare printre primele $n-1$ cifre. Să zicem că $x_k = y_\ell$. (Să observăm că $k \neq \ell$ deoarece $x_k+y_k = 9$ este impar.) Atunci avem şi $y_k = 9-x_k = 9-y_\ell = x_\ell$. Astfel putem elimina perechi identice de cifre până când ajungem fie la o pereche, (x_n, y_n), dacă n este impar, fie la două perechi, (x_j, y_j) şi (x_n, y_n), dacă n este par. În primul caz, cifrele trebuie să fie identice, deci $x_n = y_n = 5$, ceea ce arată din nou că x şi y sunt multipli de 5. A doua variantă nu este posibilă pentru că ar trebui ca $x_j = y_n$ şi $y_j = x_n$, deci $19 = 9+10 = x_j + y_j + x_n + y_n = 2(x_n + y_n)$ este număr par, fals.

RMT 3/2018

OBJ.142. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $11x^2 + 14y^2 = 5z^2$.

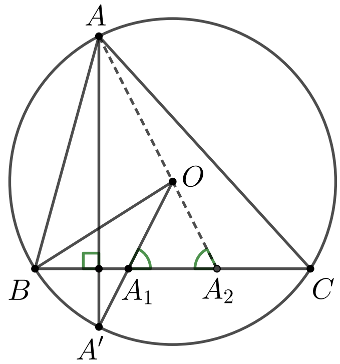
* * *

Soluţie: Dacă $xyz = 0$, se arată uşor că singura soluţie este $x = y = z = 0$.
Fie $d = (x, y, z)$. Simplificăm relaţia prin d^2 pentru a ajunge la $11a^2 + 14b^2 = 5c^2$, unde $(a, b, c) = 1$. Considerăm relaţia modulo 8: $3a^2 + 6b^2 \equiv 5c^2 \pmod 8$. Ştim însă că a^2 poate lua doar 3 resturi modulo 8, anume $0, 1, 4$. Analizând cazurile, deducem că singura posibilitate este să avem a, b, c pare, ceea ce contrazice $(a, b, c) = 1$. Deducem că singura soluţie este $x = y = z = 0$.

OBJ.143. Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC şi A', B', C' intersecţiile înălţimilor din A, B, respectiv C cu cercul circumscris triunghiului. Dacă O este centrul acestui cerc, iar A_1, B_1, C_1 sunt intersecţiile dintre OA', OB' şi OC' cu laturile BC, CA, respectiv AB, demonstraţi că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.

Manuela Prajea

Soluţie: Avem $m(\widehat{BOA_1}) = m(A'B) = 2m(\widehat{BAA'}) = 2(90^\circ - m(\widehat{B})) = 180^\circ - 2m(\widehat{B})$ şi analog $m(\widehat{COA_1}) = 180^\circ - 2m(\widehat{C})$. Din Teorema Sinsusului în ΔOBA_1 şi în ΔOCA_1 rezultă $\dfrac{BA_1}{\sin(2B)} = \dfrac{OA_1}{\sin(\widehat{OBC})} = \dfrac{OA_1}{\sin(\widehat{OCB})} = \dfrac{CA_1}{\sin(2C)}$, deci $\dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{\sin(2B)}{\sin(2C)}$. Folosind analoagele şi reciproca Teoremei lui Ceva deducem concluzia.



Remarcă: Dacă $AO \cap BC = \{A_2\}$, atunci $m(\sphericalangle OA_2B) = 90^\circ - m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)$, iar $m(\sphericalangle OA_1C) = m(\sphericalangle A'A_1B) = 180^\circ - m(\sphericalangle A_1A'B) - m(\sphericalangle A'BA_1) = 180^\circ - m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C)$. Astfel, triunghiurile BOA_1 şi COA_2 sunt congruente, deci A_1 este conjugatul izotomic al lui A_2, adică $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{CA_2}{A_2B}$. Definind analog punctele B_2 şi C_2, este clar că dreptele AA_2, BB_2, CC_2 sunt concurente (în O), deci şi dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente (în conjugatul izotomic al lui O). Afirmaţiile de mai sus se demonstrează imediat folosind teorema lui Ceva şi reciproca acesteia.

OBJ.144. Demonstraţi că pentru orice numere pozitive a, b, c are loc inegalitatea

$$\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ca} + \frac{c}{c^2+ab} \geq \frac{3}{2} \cdot \frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}.$$

Marian Cucoaneş şi Marius Drăgan

Soluţie: Inegalitatea din cerinţă poate fi scrisă sub forma $2(a^5b^2 + a^2b^5 + a^5c^2 + a^2c^5 + b^5c^2 + b^2c^5) - (a^4b^3 + a^3b^4 + b^4c^3 + b^3c^4 + a^4c^3 + a^3c^4) - abc(a^4 + b^4 + c^4) + abc(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - abc(a^3b + ab^3 + bc^3 + cb^3 + ac^3 + ca^3) \geq 0$ sau $2[5,2,0] + \frac{1}{2}[3,3,1] + [4,2,1] \geq [4,3,0] + \frac{1}{2}[5,1,1]$ adică $4[5,2,0] + [3,3,1] \geq 2[4,3,0] + [5,1,1] + 2[4,2,1]$. Folosim inegalitatea lui Schur $[4,0,0] + [2,1,1] \geq 2[3,1,0]$ înmulţită cu abc, adică $[5,1,1] + [3,2,2] \geq 2[4,2,1]$. Acum, din inegalitatea lui Muirhead

ştim că $4[5,2,0]+[3,3,1] \geq 3[5,2,0]+[5,1,1]+[3,2,2] \geq (2[4,3,0]+[5,1,1])+2[4,2,1]$, inegalitatea la care trebuia să ajungem.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c$.
Remarcă: Folosind faptul că membrul stâng este majorat de $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ (Baltic Way 2003), inegalitatea de mai sus rafinează inegalitatea $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc} \geq \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2}\right)$.

OBJ.145. Rezolvaţi în numere întregi ecuaţia $5(x^2+xy+y^2)=(x+y)(x^2+y^2)$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Dacă $x=0$ atunci $y \in \{0,5\}$; $y=0 \Rightarrow x \in \{0,5\}$.
În continuare, presupunem că $x,y \in \mathbb{Z}^*$. Atunci $x+y>0$. Mai mult, dacă presupunem $x+y=1$, relaţia din ipoteză este falsă, deci $x+y \geq 2$. Presupunând prin absurd $5 \,|\, x+y$, deducem că $x^2+y^2 \,|\, x^2+xy+y^2$, imposibil deoarece $0<|xy|<x^2+y^2$.
Deci $5 \,|\, x^2+y^2 \Rightarrow x+y \,|\, x^2+xy+y^2$, deci $x+y \,|\, x^2$ şi $x+y \,|\, y^2$. Deci $(x,y) \neq 1$. Fie atunci $x=du,\ y=dv$, cu $u,v \in \mathbb{Z}^*,\ (u,v)=1,\ d \geq 2$. Ipoteza este echivalentă cu $5(u^2+uv+v^2)=d(u+v)(u^2+v^2)$, deci $u+v \in \mathbb{N}^*$. Prin acelaşi algoritm ca mai devreme deducem că $5|u^2+v^2 \Rightarrow u+v|u^2+uv+v^2 \Rightarrow u+v|u^2; u+v|v^2 \Rightarrow u+v=1$. Deci $v=1-u$. Deducem că $\dfrac{2u^2-2u+1}{u^2-u+1}=\dfrac{5}{d}$. Cum $(2u^2-2u+1, u^2-u+1)=1$, ajungem la $2u^2-2u+1=5k; u^2-u+1=dk$, unde $k \in \mathbb{N}^*$. Deci $-1=5k-2dk \Rightarrow k=1 \Rightarrow u^2-u-2=0 \Rightarrow u=-1$ sau $u=2$.
Dacă $u=-1 \Rightarrow x=-3, y=6$, dacă $u=2 \Rightarrow x=6, y=-3$.
Soluţiile sunt $\{(0,0);(0,5);(5,0);(-3,6);(6,-3)\}$.

OBJ.146. Fie a,b,c,d numere reale astfel încât $a,b,c \geq 1 \geq d \geq 0$ şi $a+b+c+d=4$.
Demonstraţi inegalităţile:
a) $5 \leq ab+ac+ad+bc+bd+cd \leq 6$,
b) $2 \leq abc+abd+acd+bcd \leq 4$,
c) $a^3+b^3+c^3+d^3+\dfrac{72}{a^2+b^2+c^2+d^2} \leq 22$.

Leonard Giugiuc şi Marian Cucoaneş

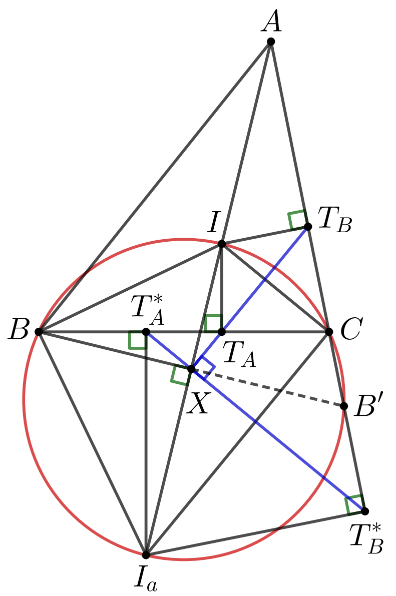
Soluţie: a) Avem $(a-1)(b-1) \geq 0$, $(b-1)(c-1) \geq 0$ şi $(c-1)(a-1) \geq 0$, deci $ab \geq a+b-1$ şi analoagele. Prin adunare, obtinem $ab+bc+ca \geq 2(a+b+c)-3$ (*), deci $ab+bc+cd+da+ac+bd \geq (d+2)(a+b+c)-3=(d+2)(4-d)-3 \geq 5$, ultima inegalitate fiind echivalentă cu $d(2-d) \geq 0$, care este evidentă pentru $d \in [0,1]$. Egalitate avem dacă $d=0$ şi două dintre numerele a,b,c sunt 1 (deci al patrulea număr este 2).
Altfel: Dacă înlocuim (a,d) cu $(a+d,0)$, expresia $ab+bc+ca+ad+bd+cd$ scade (cu ad), deci este suficient să demonstrăm inegalitatea în cazul $d=0$. În acest caz putem fie folosi (*), fie remarca din nou că dacă îndepărtăm două variabile (fără a le modifica suma), expresia $ab+bc+ca$ scade. Putem astfel micşora două dintre variabile până când devin 1 (ultima variabilă devine 2). În acest caz valoarea expresiei este 5.
$ab+bc+cd+da+ac+db \leq 6 \Leftrightarrow (a+b+c+d)^2-(a^2+b^2+c^2+d^2) \leq 12 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 4$, evident din inegalitatea mediilor.
b) Dacă înlocuim (a,d) cu $(a+d,0)$, atunci expresia $E(a,b,c,d)=abc+abd+acd+bcd$ devine $E(a+d,b,c,0)=(a+d)bc=abc+bcd$, adică mai mică. Înlocuind acum (b,c) cu $(b+c-1,1)$, obţinem $E(a+d,b,c,0) \geq E(a+d,b+c-1,1,0)=(a+d)(b+c-1)=(4-b-c)(b+c-1)$. Notând $s=b+c$, ştim că $b+c \geq 1+1=2$ şi $b+c=4-a-d \leq 4-1-0=3$, deci $s \in [2,3]$. Atunci $E(a,b,c,d) \geq (4-s)(s-1)=-4+5s-s^2=2-(s-2)(s-3) \geq 2$ deoarece $(s-2)(s-3) \leq 0$.

În plus, $ab(c+d)+cd(a+b) \le \dfrac{(a+b)^2}{4}\cdot(c+d)+\dfrac{(c+d)^2}{4}\cdot(a+b) =$
$\dfrac{(a+b)(c+d)(a+b+c+d)}{4} = (a+b)(c+d) \le \dfrac{(a+b+c+d)^2}{4} = 4.$

c) Notăm $x = a-1$, $y = b-1$, $z = c-1$. Atunci $0 \le x+y+z \le 1$ şi $0 \le x, y, z \le 1$, iar $d = 1-x-y-z$. Notăm $u = a^3+b^3+c^3+d^3 = 4+6(x+y+z)^2-6(xy+yz+zx)-3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+zx^2+z^2x)-6xyz \le 4+6-0-0 = 10$.
Notăm $v = a^2+b^2+c^2+d^2 = 4+2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx) = 4+2(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$. Obţinem că $v = a^2+b^2+c^2+d^2 \ge 4$. (Sau $a^2+b^2+c^2+d^2 = (a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \ge 4^2-2\cdot 6 = 4$.)
De asemenea, $u-3v+8 = -3(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+zx^2+z^2x)-6xyz \Rightarrow u-3v+8 \le 0 \Leftrightarrow (a^3+b^3+c^3+d^3)(a^2+b^2+c^2+d^2)-22(a^2+b^2+c^2+d^2)+72 \le 0 \Leftrightarrow uv-22v+72 \le 0 \Leftrightarrow (u-10)(v-4)+4(u-3v+8) \le 0$, adevărat.
Egalitate avem dacă $u-3v+8 = 0$ şi fie $u = 10$, fie $v = 4$. Ori $u-3v+8 = 0$ are loc când (cel puţin) două din variabilele x, y, z sunt egale cu 0, deci cel puţin două dintre a, b, c sunt egale cu 1. Mai trebuie, în plus, $u = 10$ (ceea ce se întâmplă dacă, în plus, $x+y+z = 1$, adică pentru $d = 0$, adică pentru numerele $0, 1, 1, 2$), sau dacă $v = 4$, ceea ce se întâmplă dacă $x = y = z = 0$, adică pentru $a = b = c = d = 1$.

OBJ.147. Se consideră triunghiul oarecare ABC în care punctele de contact ale cercului înscris cu laturile BC, CA şi AB sunt T_A, T_B, respectiv T_C, iar punctele de contact ale cercului A-exînscris cu latura BC şi prelungirile laturilor AC şi AB sunt T_A^*, T_B^*, respectiv T_C^*. Demonstraţi că dreptele T_AT_B şi $T_A^*T_B^*$ sunt perpendiculare şi se intersectează în proiecţia punctului B pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

Petru Braica



Soluţie: $T_A^*T_B^*$ este perpendiculară pe bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle C$, deci este paralelă cu bisectoarea interioară a lui $\sphericalangle C$, care la rândul ei este perpendiculară pe T_AT_B. Toate acestea implică perpendicularitatea dreptelor $T_A^*T_B^*$ şi T_AT_B.
Vom trata cazul $AB > AC$. Cazul $AB = AC$ este trivial, iar cazul $AC > AB$ este analog. Fie X proiecţia lui B pe AI şi $\{B'\} = BX \cap AC$. Atunci $[AX]$ este bisectoare şi înălţime în triunghiul ABB', deci acesta este isoscel. Rezultă că $m(\sphericalangle BI_aC) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle AB'X)$, deci patrulaterul $I_aB'CB$ este inscriptibil. Rezultă că proiecţiile punctului I_a pe dreptele suport ale laturilor triunghiului BCB' sunt coliniare (determină dreapta lui Simson a lui I_a), adică punctele T_A^*, X şi T_B^* sunt coliniare.

Similar, $m(\sphericalangle IBB') = m(\sphericalangle ABX) - m(\sphericalangle ABI) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\sphericalangle A) - \frac{1}{2}m(\sphericalangle B) = \frac{1}{2}m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle ACI)$, deci şi patrulaterul $CIBB'$ este inscriptibil. Deducem că proiecţiile lui I pe dreptele BC, CB' şi $B'B$ sunt coliniare (dreapta lui Simson), adică T_A, X şi T_B sunt coliniare. În concluzie, dreptele T_AT_B şi $T_A^*T_B^*$ sunt perpendiculare şi se intersectează în proiecţia punctului B pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle A$.

OBJ.148. Determinaţi numerele naturale $n \geq 3$ cu proprietatea că numerele $1, 2, \ldots, n$ pot fi aşezate într-o anumită ordine pe un cerc astfel încât suma oricăror două numere vecine să fie divizibilă cu 3 sau cu 5.

Andrei Eckstein

Soluţie: Numerele $m = 3$, $n = 4$ şi $n = 5$ nu au proprietatea dorită deoarece 3 nu poate avea decât un singur vecin, anume pe 2, cu care adunat să dea un multiplu de 3 sau de 5.
Vom arăta că orice $n \geq 6$ are proprietatea cerută. Dacă n este multiplu de 3 sau dă rest 2 la împărţirea cu 3, atunci printre numerele $1, 2, \ldots, n$ avem la fel de multe numere care dau rest 1 la împărţirea cu 3 ca şi numere care dau rest 2 la împărţirea cu 3. Putem atunci pune numerele în ordinea $3, 2, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{zona A}}, 4, 6, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{zona B}}$, unde în zona A se trec alternativ numerele care dau rest 1, respectiv 2 la împărţirea cu 3, iar în zona B se trec numere care sunt divizibile cu 3.
Dacă n dă rest 1 la împărţirea cu 3, atunci numerele de forma $3k + 1$ sunt cu unu mai multe decât cele de forma $3k + 2$, deci putem pune numerele în ordinea $3, 7, \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{zona A}}, 4, 6, \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{zona B}}$, unde în zona A se trec alternativ numere care dau rest 1, respectiv 2 la împărţirea cu 3, iar în zona B se trec numere care sunt divizibile cu 3.

RMT 4/2018

OBJ.149. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$ atunci
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{(a+3b)(b+3c)(c+3a)}{abc}}.$$

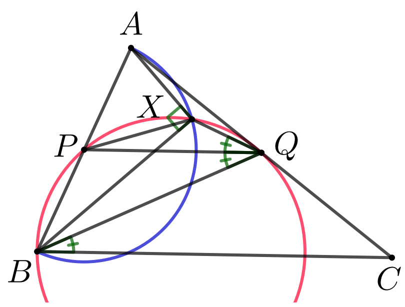
Florin Rotaru

Soluţie: (*Marius Olteanu*) Notând $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$, $z = \frac{c}{a}$, avem că $x, y, z > 0$ satisfac $xyz = 1$, iar inegalitatea revine la $x + y + z \geq \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+3)(y+3)(z+3)}$. Dar, conform inegalităţii mediilor, $3\sqrt[3]{(x+3)(y+3)(z+3)} \leq x + y + z + 9 \leq 4(x + y + z)$, deoarece, tot din inegalitatea mediilor, $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$. Egalitatea are loc dacă $x = y = z = 1$, adică dacă $a = b = c$.

OBJ.150. În triunghiul ascuţitunghic ABC, P şi Q sunt mijloacele laturilor $[AB]$, respectiv $[AC]$. În interiorul triunghiului ABC se consideră punctul X care se află pe cercul de diametru $[AB]$ şi satisface $m(\sphericalangle XQB) = 2m(\sphericalangle QBC)$. Demonstraţi că patrulaterul $BQXP$ este inscriptibil.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Punctul P, fiind centrul cercului circumscris triunghiului dreptunghic AXB, se găseşte pe mediatoarea segmentului $[BX]$. De asemenea, punctul P se găseşte pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle XQB$ (deoarece $m(\sphericalangle XQB) = 2m(\sphericalangle QBC) = 2m(\sphericalangle PQB)$).



Cum X nu este simetricul lui B faţă de PQ (acesta nu se află în interiorul triunghiului), $BQ \neq XQ$, deci bisectoarea unghiului $\sphericalangle XQB$ intersectează mediatoarea lui $[BX]$ într-un singur punct, punct despre care se ştie că este mijlocul arcului BX al cercului circumscris triunghiului BQX. Rezultă că P se află pe cercul circumscris triunghiului BQX, de unde concluzia.

OBJ.151. Fie $a, b \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $a^3 + b^3 = 2$. Arătaţi că

$$2a + b + \frac{2}{ab} \geq \sqrt{5(3a^2 + 2b^2)}.$$

Marian Cucoaneş

Soluţia 1: Inegalitatea se scrie echivalent $2a + b + \dfrac{a^3 + b^3}{ab} \geq \sqrt{5(3a^2 + 2b^2)}$. După ridicare la pătrat şi calcule, ea se scrie $(a - b)^2(a^4 + 6a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 + b^4) \geq 0$, inegalitate evidentă. Egalitate avem dacă $a = b = 1$.

Soluţia 2: Scăzând $3a + 2b$ din ambii membri, inegalitatea se scrie echivalent $\dfrac{a^3 + b^3}{ab} - a - b \geq \sqrt{5(3a^2 + 2b^2)} - 3a - 2b$, adică

$$\frac{(a - b)^2(a + b)}{ab} \geq \frac{6(a - b)^2}{\sqrt{5(3a^2 + 2b^2)} + 3a + 2b}.$$

Este atunci suficient să arătăm că $\dfrac{a + b}{ab} \geq \dfrac{6}{3a + 2b} \geq \dfrac{6}{\sqrt{5(3a^2 + 2b^2)} + 3a + 2b}$.

Prima inegalitate revine la $3a^2 + 2b^2 \geq ab$ şi rezultă din $3a^2 + 2b^2 > a^2 + b^2 \geq 2ab > ab$, iar a doua este evidentă.

Comentariu: Ideea de a scădea $3a + 2b$ din ambii membri vine de la observaţia că ambii membri sunt mai mari ca $3a + 2b$, în cazul membrului drept, acest lucru rezultând din CBS: $5(3a^2 + 2b^2) = (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2) \geq (a + a + a + b + b)^2$.

OBJ.152. Fie $n \geq 3$ un număr natural. Scriem numerele $1, 2, \ldots, n$ pe un cerc (nu neapărat în ordine) şi calculăm cele n sume de câte două numere vecine pe cerc. Care este numărul minim de sume distincte pe care le putem obţine?

Andrei Eckstein

Soluţie: Ne uităm la vecinii lui 1 şi la vecinii lui n. Dacă 1 nu este vecin cu n, aceste 4 sume (ale lui 1 cu cei doi vecini ai săi şi ale lui n cu cei doi vecini ai săi) sunt diferite, deci avem nevoie de cel puţin 4 sume diferite. O variantă cu 3 sau mai puţine sume s-ar putea eventual obţine numai în cazul în care numerele 1 şi n sunt vecine. Dacă avem, în ordine, pe cerc numerele x, 1, n, y, atunci $1 + x < 1 + n < y + n$, deci nu putem avea mai puţin de 3 sume distincte.
Un exemplu de aranjare a numerelor pe cerc pentru care se obţin trei sume distincte este:
1, n, 2, $n - 1$, 3, $n - 2$, $\ldots$, (dacă $n = 2k + 1$, ultimele numere sunt k, $k + 2$, $k + 1$ şi urmează iarăşi 1, iar dacă $n = 2k$, ultimele numere sunt $k - 1$, $k + 2$, k, $k + 1$ şi urmează 1). În concluzie, numărul minim de sume distincte este 3.

OBJ.153. Arătaţi că există o infinitate de perechi de numere naturale (a, b) pentru care

$$c.m.m.d.c.(a^2 + 1, b^2 + 1) = a + b.$$

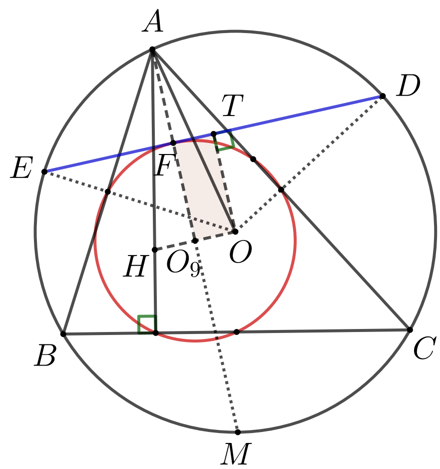
Olimpiadă Polonia, 2014

Soluţie: Putem alege $a = b^2 - b + 1$, cu $b \in \mathbb{N}^*$ arbitrar. Atunci $a + b = b^2 + 1$, deci divide atât $b^2 + 1$ cât şi diferenţa $(a^2 + 1) - (b^2 + 1) = (a + b)(a - b)$, deci divide şi $a^2 + 1$ şi este, evident, cel mai mare divizor comun al celor două numere.

OBJ.154. Fie ABC un triunghi cu $m(\sphericalangle BAC) = 60°$ şi $AB \neq AC$. Notăm cu D şi E punctele de intersecţie ale bisectoarelor unghiurilor $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle ACB$ cu cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că dreapta DE este tangentă cercului lui Euler asociat triunghiului ABC.

Petru Braica şi Mihai Miculiţa

Soluţie: Fie H, O şi O_9 ortocentrul, centrul cercului circumscris, respectiv centrul cercului lui Euler în triunghiul ABC. Se ştie că semidreptele $(AH$ şi $(AO$ sunt izogonale (simetrice faţă de bisectoarea unghiului A), că $AH = 2R\cos A = R = AO$ şi că O_9 este mijlocul lui $[OH]$. Cum AHO este triunghi isoscel, $(AO_9$ este bisectoarea unghiului A şi înălţime în triunghiul AHO, adică $AO_9 \perp O_9O$. Ducem $OT \perp DE, T \in DE$ şi notăm cu F intersecţia dreptelor DE şi AO_9. Dacă M este al doilea punct de intersecţie a bisectoarei din A cu cercul circumscris,



este uşor de văzut că $m(\sphericalangle AFD) = \frac{m(AD)+m(ME)}{2} = m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ECB) + m(\sphericalangle BAM) = \frac{m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)}{2} = 90^\circ$, deci $FO_9 \perp DE$. Rezultă că $OTFO_9$ este dreptunghi. Dar $m(\sphericalangle DOE) = 120^\circ$, deci $m(\sphericalangle TEO) = 30^\circ$, prin urmare $FO_9 = OT = OE\sin 30^\circ = R/2$. Cum raza cercului lui Euler este $R/2$, relaţia precedentă arată că DE este tangentă cercului lui Euler.

Remarci: (*Petru Braica*)

1. Punctul F este de fapt punctul lui Feuerbach de tangenţă a cercului înscris cu cercul lui Euler asociat triunghiului. ($[DE]$ şi $[CB]$ sunt simetrice faţă de perpendiculara în I pe bisectoarea din A.)

2. Dacă notăm cu D' şi E' al doilea punct de intersecţie al bisectoarelor exterioare din B şi C cu cercul circumscris, atunci şi $D'E'$ este tangent cercului lui Euler.

OBJ.155. Determinaţi numerele naturale n care au $n - 11$ divizori naturali.

Dr. RMT

Soluţie: Dacă n este par, $n = 2k$ cu $k \in \mathbb{N}$, atunci numerele $k+1$, $k+2$, ..., $2k-1$ nu sunt divizori ai lui n, deci $2k - 11 \leq k + 1$, deci $k \leq 12$, adică $n \leq 24$. În plus, având un număr impar de divizori, n trebuie să fie pătrat perfect, deci $n = 16$, care are într-adevăr $n - 11 = 5$ divizori naturali.

Dacă n este impar, $n = 2k+1$ cu $k \in \mathbb{N}$, atunci numerele $k+1,\ k+2, \ldots, 2k$ nu sunt divizori ai lui $2k+1$ (sau se poate raţiona cu numerele 2, 4, ..., $2k$), deci $2k + 1 - 11 \leq k + 1$, adică $k \leq 11$, deci $n \leq 23$. Verificând numerele 13, 15, 17, 19, 21 şi 23 găsim că 13 are într-adevăr 2 divizori, 15 are într-adevăr 4 divizori, iar celelalte numere nu convin. În concluzie, $n \in \{13, 15, 16\}$.

OBJ.156. Care este numărul minim de numere care trebuie alese din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$ pentru a putea fi siguri că printre numerele alese există câteva cu suma divizibilă cu 11?

Róka Sándor, Concursul KöMaL, 2018

Soluţie: Vom arăta că minimul căutat este 5. Dacă alegem 4 sau mai puţine numere, ele ar putea forma o submulţime a lui $\{1, 2, 3, 4\}$ şi din ea nu se pot alege câteva cu suma divizibilă cu 11.

Reciproc, oricum am alege 5 numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 10\}$, printre ele există câteva cu suma divizibilă cu 11. Să presupunem contrariul. Atunci din fiecare din perechile $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$ şi $\{5, 6\}$ trebuie să alegem exact un element. Să analizăm cazuri:

- dacă alegem 1 şi 2, cum $1 + 2 + 8 = 11$, trebuie să îl alegem pe 3; dar $1 + 2 + 3 + 5 = 11$, deci

trebuie să-l alegem pe 6; atunci $1+4+6=11=1+3+7$, deci din perechea $\{4,7\}$ nu mai putem alege niciun element fără a obţine câteva numere dintre cele alese care au suma 11;
- dacă alegem 10 şi 9, cum $10+9+3=22$, trebuie să-l alegem pe 8; dar $10+9+8+6=33$, deci trebuie să-l alegem pe 5; atunci $10+7+5=22=10+8+4$, deci din perechea $\{4,7\}$ nu mai putem alege niciun element fără a obţine câteva numere dintre cele alese care au suma 11;
- dacă alegem 1, 9 şi 3 avem $1+3+9+4+5=22=3+9+4+6=1+9+7+5=9+6+7$, deci orice alegere din ultimele două perechi produce câteva numere cu suma divizibilă cu 11;
- dacă alegem 1, 9 şi 8, cum $1+9+8+4=22$, trebuie să-l alegem pe 7, dar $1+5+7+9=6+7+9$ arată că nu îl putem alege nici pe 5, nici pe 6 din ultima pereche;
- dacă alegem 10, 2 şi 8 avem $10+8+2+7+6=33$, $8+2+7+5=22=10+2+4+6$ şi $2+5+4=11$, deci orice alegere din ultimele două perechi produce câteva numere cu suma divizibilă cu 11;
- dacă alegem 10, 2 şi 3, cum $10+2+3+7=22$, trebuie să-l alegem pe 4, dar $10+6+4+2$ şi $5+4+2$ sunt divizibile cu 11, ceea ce arată că nu îl putem alege nici pe 5, nici pe 6 din ultima pereche.
Aşadar, nu putem alege 5 numere fără ca unele dintre numerele alese să aibă suma divizibilă cu 11.

RMT 1/2019

OBJ.157. Fie a,b,c trei numere reale pozitive astfel încât $a+b+c=9$. Arătaţi că

$$abc+\frac{2916}{ab+bc+ca}\geq 135.$$

Florin Rotaru

Soluţie: Cu inegalitatea lui Schur avem $(a+b+c)^3+9abc\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$, de unde, cu condiţia din enunţ, $abc\geq 4(ab+bc+ca)-81$. Este suficient să arătăm că $4(ab+bc+ca)-81+\dfrac{2916}{ab+bc+ca}\geq 135$, inegalitate care revine la $(ab+bc+ca-27)^2\geq 0$, care este evidentă. Egalitatea are loc dacă $a=b=c=3$.

Remarcă: (*Marius Olteanu*)

Are loc inegalitatea mai generală: dacă $a,b,c>0$ şi $a+b+c=3k$, atunci $abc+\dfrac{12k^5}{ab+bc+ca}\geq 5k^3$. Notând $x=\dfrac{a}{k}$, $y=\dfrac{b}{k}$, $z=\dfrac{c}{k}$, avem $x,y,z>0$ cu $x+y+z=3$ şi trebuie să arătăm că $xyz+\dfrac{12}{xy+yz+zx}\geq 5$, care este o inegalitate cunoscută, care apare şi în cartea *V. Cârtoaje – Algebraic Inequalities - Old and New Methods*, Ed. GIL, 2006.

Remarcă: Am primit şi alte soluţii (*Titu Zvonaru, Nicuşor Zlota, Marin Chirciu şi Octavian Stroe*) la această inegalitate, cele trimise de *Titu Zvonaru* fiind reunite într-o notă în acest număr al revistei.

OBJ.158. Aflaţi numerele naturale x,y,z pentru care $x^2+2y+4z$, $y^2+2z+4x$ şi $z^2+2x+4y$ sunt simultan pătrate perfecte.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Putem presupune că $x,y\leq z$. Avem atunci $z^2\leq z^2+2x+4y\leq z^2+6z<(z+3)^2$, deci $z^2+2x+4y$ poate fi z^2 sau $(z+2)^2$ (nu poate fi $(z+1)^2$ din motive de paritate). În primul caz obţinem $x=y=0$ şi ar trebui ca $4z$ şi $2z$ să fie simultan pătrate perfecte, ceea ce este posibil numai dacă $z=0$. Obţinem aşadar soluţia $x=y=z=0$. În celălalt caz, $z^2+2x+4y=z^2+4z+4$ implică $x=2(z-y+1)$ (număr par) sau, totuna, $2z=x+2y-2$.
Distingem în continuare două cazuri: $x\leq y$ şi $y<x$.

Dacă $x \leq y$, atunci $y^2 < y^2+2z+4x = y^2+2y+5x-2 \leq y^2+7y-2 < (y+4)^2$. Cum $y^2+2z+4x$ are aceeaşi paritate ca şi y^2 şi trebui să fie pătrat perfect, rezultă $y^2+2y+5x-2 = (y+2)^2$, adică $2y = 5x-6$. Atunci $2z = x+2y-2 = 6x-8$, deci $x^2+2y+4z = x^2+5x-6+12x-16 = x^2+17x-22$. Cazul $x = 1$ nu convine, iar pentru $x > 1$ avem $x^2 < x^2+17x-22 < (x+9)^2$. Cum x este par, $x^2+17x-22$ are aceeaşi paritate ca şi x^2, deci poate fi $(x+2)^2$, $(x+4)^2$, $(x+6)^2$ sau $(x+8)^2$. Egalând pe rând aceste cantităţi cu $x^2+17x-22$ obţinem $x = 2$ în cazul al doilea şi $x = 86$ în cazul al patrulea, celelalte două ecuaţii neavând soluţii întregi.
Dacă $x = 2$ atunci obţinem $2y = 5x-6 = 4$ şi $2z = 6x-8 = 4$, adică $x = y = z = 2$. Într-adevăr, în acest caz, $x^2+2y+4z = y^2+2z+4x = z^2+2x+4y = 16 = 4^2$.
Dacă $x = 86$, atunci $2y = 5x-6 = 424$ şi $z = 3x-4 = 254$ deci obţinem $x = 86$, $y = 212$, $z = 254$ şi permutările circulare ale acestei soluţii. În acest caz $x^2+2y+4z = 8836 = 94^2$, $y^2+2z+4x = 45796 = 214^2$ şi $z^2+2x+4y = 65536 = 256^2$ sunt, într-adevăr, simultan pătrate perfecte.
Dacă $y < x$, atunci $x^2+2y+4z = x^2+2y+2x+4y-4 = x^2+6y+2x-4 < x^2+8x-4 < (x+4)^2$. Avem aşadar $x^2 < x^2+2y+4z < (x+4)^2$, deci $x^2+2y+4z = (x+2)^2$, adică $x^2+6y+2x-4 = x^2+4x+4$, deci $x = 3y-4$ şi $2z = x+2y-2 = 5y-6$. Dar $x \leq z$ implică $6y-8 \leq 5y-6$, adică $y \leq 2$. Dar pentru $y \in \{0,1\}$ obţinem $x < 0$, iar pentru $y = 2$ obţinem $x = y$, aşadar în acest caz nu avem soluţii. Rămân cele patru soluţii găsite în primul caz.

OBJ.159. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $2 \cdot 7^x = 13^y + 1$.

Marian Cucoaneş

Soluţie: Dacă $x = 0$ atunci $y = 0$, iar dacă $x = 1$, atunci $y = 1$. Să arătăm că acestea sunt singurele soluţii. Dacă $x \geq 2$, notând cu $v_7(n)$ exponentul la care apare numărul prim 7 în descompunerea în factori primi a lui n, avem $v_7(2 \cdot 7^x) = x \geq 2$, adică $v_7(13^y+1) \geq 2$. Cum $13^y + 1 = (14-1)^y + 1 \equiv (-1)^y + 1 \pmod 7$, rezultă că y este impar. Cum 7 divide $13+1$ dar nu divide nici 13, nici 1, putem aplica *Lifting the Exponent Lemma* (LTE) care spune că $v_7(13^y+1) = v_7(13+1) + v_7(y)$. Deducem că $v_7(y) = x-1 \geq 1$, adică $7 \mid y$. Dar, cum y este impar, rezultă atunci că 13^7+1 divide $13^y+1 = 2 \cdot 7^x$, ori se verifică uşor că 13^7+1 nu este de forma $2 \cdot 7^j$ (sau se constată că $29 \mid 13^7+1$).

OBJ.160. Este posibil să tăiem o tablă de şah după 13 drepte care să nu treacă prin centrul niciunuia din cele 64 de pătrăţele ale tablei astfel încât fiecare dintre bucăţile rezultate să conţină centrul a cel mult un pătrăţel?

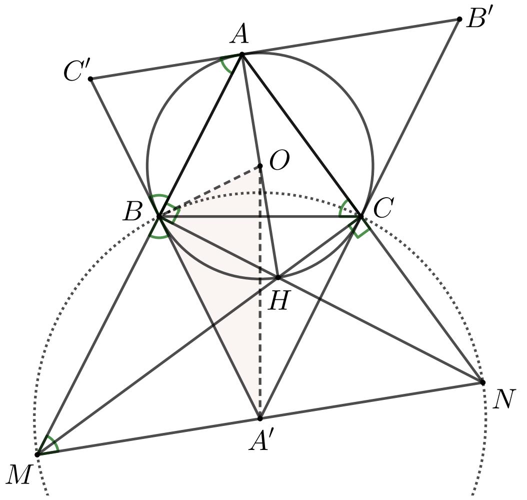
* * *

Soluţie: Răspunsul este negativ. Ne uităm la pătrăţelele unitate aflate la margine, adică pe prima şi ultima linie şi pe prima şi ultima coloană. Sunt 28 de asemenea pătrăţele. Unim centrele acestor pătrăţele prin segmente de lungime 1 care formează, împreună, un pătrat de latură 7. Dacă un anumit segment dintre acestea 28 nu este tăiat de niciuna din cele 13 drepte, atunci după tăiere capetele respectivului segment vor face parte din aceeaşi bucată. Ori fiecare dreaptă poate tăia cel mult două din cele 28 de segmente (o dreaptă taie un pătrat în cel mult două puncte), deci 13 drepte nu pot tăia toate cele 28 de segmente.

OBJ.161. În cercul $\mathscr{C}(O, R)$ se înscrie triunghiul nedreptunghic ABC. Tangentele în A, B, C la cerc determină triunghiul $A'B'C'$, $A \in B'C'$, $B \in C'A'$, $C \in A'B'$. Paralela prin A' la $B'C'$ intersectează AB şi AC în M, respectiv N. Dacă R_1 este raza cercului circumscris triunghiului MBC, iar R_2 este raza cercului circumscris triunghiului AMN, arătaţi că $R^2 + R_1^2 = R_2^2$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: Avem $\sphericalangle A'MB \equiv \sphericalangle C'AB \equiv \sphericalangle C'BA \equiv \sphericalangle A'BM$, deci $A'M = A'B$. Analog, $A'C = A'N$. Dar $A'B = A'C$, deci A' este egal depărtat de M, B, C şi N.



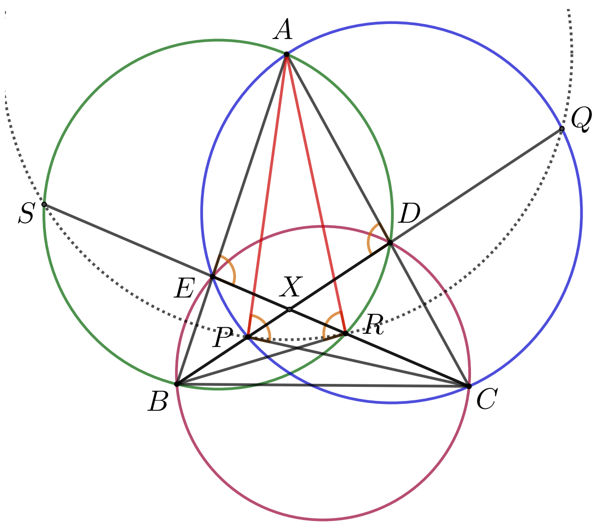
Asta înseamnă că $[MC]$ şi $[NB]$ sunt înălţimi în triunghiul AMN. Fie H intersecţia acestora. Se ştie că patrulaterul $ABHC$ este înscris în cercul de diametru $[AH]$, că mijlocul, O, al lui $[AH]$ este punctul diametral opus lui A' (mijlocul lui $[MN]$) în cercul lui Euler asociat triunghiului AMN care are raza $\dfrac{R_2}{2}$, deci $A'B = R_1$, $BO = R$ şi $OA' = R_2$ (diametru în cercul lui Euler). În plus, tangenta $A'B$ la cercul $\mathscr{C}(O, R)$ este perpendiculară pe raza OB, iar teorema lui Pitagora în triunghiul OBA' implică relaţia din enunţ.

OBJ.162. Un cerc arbitrar care trece prin vârfurile B şi C, intersectează a doua oară laturile $[AC]$ şi $[AB]$ ale unui triunghi oarecare ABC în punctele D, respectiv E. Cercul circumscris triunghiului AEC intersectează dreapta BD în punctele P şi Q, iar cercul circumscris triunghiului ABD intersectează dreapta CE în punctele R şi S. Demonstraţi că punctele P, Q, R şi S sunt conciclice.

Petru Braica şi Mihai Miculiţa

Soluţie: Fie $\{X\} = BD \cap CE$. Scriind puterea punctului X faţă de fiecare din cele trei cercuri din problemă obţinem $XR \cdot XS = XB \cdot XD = XE \cdot XC = XP \cdot XQ$. Cum X se află pe câte o coardă în fiecare din cercuri, $\{X\} = [PQ] \cap [RS]$ şi atunci, din reciproca teoremei puterii punctului rezultă că punctele P, Q, R, S sunt conciclice.

Remarcă: Se poate arăta că centrul cercului pe care se află punctele P, Q, R, S este chiar A. Se arată uşor că triunghiurile ADP şi



APC sunt asemenea (UU), deci $AP^2 = AD \cdot AC$. Analog, $AQ^2 = AE \cdot AB$. Din puterea punctului A faţă de cercul circumscris lui $BCDE$ rezultă $AD \cdot AC = AE \cdot AB$, deci $AP = AQ = \sqrt{\rho(A)}$. Analog se arată că $AR = AS = \sqrt{\rho(A)}$.

OBJ.163. Fie numărul natural n, $n \geq 2$. Demonstraţi că există numerele naturale nenule a_1, a_2, ... , a_n astfel încât, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_i \equiv 1 \pmod{a_k}.$$

Titu Zvonaru

Soluţie: Considerăm numerele: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = a_1a_2 + 1$, ... , $a_{n-1} = a_1a_2 \cdots a_{n-2} + 1$ şi $a_n = a_1a_2 \cdots a_{n-1} - 1$. Să verificăm că aceste numere satisfac condiţiile din enunţ. Cum $a_k \equiv 1 \pmod{a_j}$ pentru orice $j < k < n$ (rezultă din modul în care este definit a_k) şi $a_n \equiv -1 \pmod{a_j}$, avem că $a_1 \cdots a_{j-1}a_{j+1} \cdots a_n \equiv -a_1a_2 \cdots a_{j-1} \equiv 1 \pmod{a_j}$ (ultima congruenţă rezultă din modul în care a fost definit a_j). Aşadar, $a_1a_2 \cdots a_{j-1}a_{j+1} \cdots a_n \equiv 1 \pmod{a_j}$ pentru orice $j \in \mathbb{N}$ astfel încât $2 \leq j \leq n-1$. Evident, $a_2, a_3, \dots, a_n$ sunt impare, deci $a_2a_3 \cdots a_n \equiv 1 \pmod 2$, iar $a_1a_2 \cdots a_{n-1} \equiv 1 \pmod{a_n}$ rezultă din definiţia lui a_n.

RMT 2/2019

OBJ.164. Dacă a, b, $c > 0$ şi $a \leq b \leq c$, arătaţi că are loc inegalitatea

$$\frac{a^2b}{b+c} + \frac{b^2c}{c+a} + \frac{c^2a}{a+b} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

Florin Stănescu

Soluţia 1: (*Marin Chirciu şi Octavian Stroe*) Notăm $S_1 = \dfrac{a^2b}{b+c} + \dfrac{b^2c}{c+a} + \dfrac{c^2a}{a+b}$ şi $S_2 = \dfrac{a^2c}{b+c} + \dfrac{b^2a}{c+a} + \dfrac{c^2b}{a+b}$. Avem $S_1 + S_2 = a^2 + b^2 + c^2$.
Prin urmare, dacă arătăm că $S_1 \leq S_2$ rezultă că $2S_1 \leq a^2 + b^2 + c^2$, de unde concluzia. Vom calcula $S_2 - S_1$ şi vom arăta că $S_2 - S_1 \geq 0$.
Într-adevăr $S_2 - S_1 = \dfrac{a^2c}{b+c} + \dfrac{b^2a}{c+a} + \dfrac{c^2b}{a+b} - \dfrac{a^2b}{b+c} - \dfrac{b^2c}{c+a} - \dfrac{c^2a}{a+b} = \dfrac{a^2(c-b)}{b+c} + \dfrac{b^2(a-c)}{c+a} + \dfrac{c^2(b-a)}{a+b}$. Cum $c - b + b - a = c - a$ rezultă:

$$S_2 - S_1 = (c-b)\left(\frac{a^2}{b+c} - \frac{b^2}{c+a}\right) + (b-a)\left(\frac{c^2}{a+b} - \frac{b^2}{c+a}\right) =$$
$$\frac{(c-b)(a-b)(a^2+ab+b^2+ac+bc)}{(b+c)(c+a)} + \frac{(c-b)(b-a)(b^2+bc+c^2+ab+ac)}{(a+b)(c+a)} \geq$$
$$\frac{(c-b)(a-b)(a^2+ab+b^2+ac+bc)}{(b+c)(c+a)} + \frac{(c-b)(b-a)(a^2+ab+b^2+ac+bc)}{(a+b)(c+a)} =$$
$$\frac{(c-b)(b-a)(a^2+ab+b^2+ac+bc)}{c+a}\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{b+c}\right) =$$
$$\frac{(c-b)(b-a)(c-a)(a^2+ab+b^2+ac+bc)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0.$$

Deducem că $S_2 - S_1 \geq 0$. Cu aceasta problema este încheiată.
Soluţia 2: (*Titu Zvonaru*)
După eliminarea numitorilor şi reducerea termenilor asemenea, obţinem
$ab^4 + bc^4 + a^4c - a^4b - b^4c - ac^4 + a^2b^3 + b^2c^3 + a^3c^2 - a^3b^2 - b^3c^2 - a^2c^3 \geq 0.$

Inegalitatea de mai sus revine la $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)^2 \geq 0$, ceea ce este evident.
Soluţia 3: (*Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota*)
Vom arăta că $\dfrac{a^2b}{b+c} \leq \dfrac{a^2+3b^2}{8}$, adică $7a^2b \leq 3b^3 + a^2c + 3b^2c$. (1)
Notăm $\dfrac{a}{b} = x \leq 1$, $\dfrac{c}{b} = y \geq 1$.
Atunci inegalitatea (1) rezultă din $x^2(7-y) \leq 6 \leq 3y+3$.
În mod similar avem $\dfrac{b^2c}{c+a} \leq \dfrac{b^2+3c^2}{8}$ (2) şi $\dfrac{c^2a}{a+b} \leq \dfrac{c^2+3a^2}{8}$. (3)
Prin adunarea inegalităţilor (1), (2) şi (3) obţinem inegalitatea din enunţ.

OBJ.165. Arătaţi că produsul a nouă numere naturale nenule consecutive nu este niciodată cub perfect.

Neculai Stanciu

Soluţie: (*Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota, Focşani*)
Fie $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 5$, numărul din mijloc, al cincilea. Atunci produsul celor nouă numere naturale consecutive este $N = (a-4)(a-3)\ldots(a+3)(a+4)$. Arătăm că $(a^3-10a-1)^3 < N < (a^3-10a)^3$, pentru $a \geq 11$.
Într-adevăr $N = a(a^2-1^2)(a^2-2^2)(a^2-3^2)(a^2-4^2) = a^9 - 30a^7 + 273a^5 - 820a^3 + 576a$, deci $N - (a^3-10a-1)^3 = a^9 - 30a^7 + 273a^5 - 820a^3 + 576a - (a^9 - 30a^7 - 3a^6 + 300a^5 + 60a^4 - 997a^3 - 300a^2 - 30a - 1) = 3a^4(a^2-9a-20) + 177a^3 + 300a^2 + 606a + 1 > 0$ pentru $a \geq 11$ şi $(a^3-10a)^3 - N = a^9 - 30a^7 + 300a^5 - 1000a^3 - (a^9 - 30a^7 + 273a^5 - 820a^3 + 576a) = 9a(3a^4 - 20a^2 - 64) \geq 9 \cdot 5(3 \cdot 5^4 - 20 \cdot 5^2 - 64) > 0$ pentru $a \geq 5$.
Avem şi $71^3 < N < 72^3$, dacă $a = 5$; $153^3 < N < 154^3$, dacă $a = 6$; $271^3 < N < 272^3$, dacă $a = 7$; $430^3 < N < 431^3$, dacă $a = 8$; $637^3 < N < 638^3$, dacă $a = 9$; $898^3 < N < 899^3$, dacă $a = 10$. Aceste inegalităţi se verifică prin calcul direct.
Rezultă că N este cuprins între două cuburi perfecte consecutive, ceea ce încheie demonstraţia.

OBJ.166. Fie $x, y, z \geq 1$. Arătaţi că $x|y-z| + y|z-x| + z|x-y| + 4(x+y+z) + 3xyz \geq 4(xy+yz+zx)$.

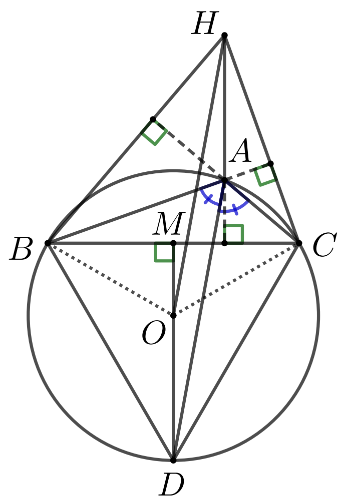
Marian Cucoaneş şi Marius Drăgan

Soluţie: Arătăm că pentru orice $x, y \geq 1$ are loc relaţia $(x-2)(y-2) + |x-y| \geq 0$, cu egalitate dacă $x = y = 2$. Inegalitatea precedentă fiind simetrică în x şi y, putem presupune $x \geq y$. Avem de demonstrat că $xy - x - 3y + 4 \geq 0$, adică $x(y-1) - 3y + 4 \geq 0$. Cum $y - 1 \geq 0$, avem $x(y-1) - 3y + 4 \geq y(y-1) - 3y + 4 = (y-2)^2 \geq 0$. Folosind această inegalitate, avem că $z(x-2)(y-2) + z|x-y| \geq 0$ şi, analog, $x(y-2)(z-2) + x|y-z| \geq 0$ şi $y(z-2)(x-2) + y|z-x| \geq 0$. Însumând aceste trei inegalităţi o obţinem pe cea din enunţ. Egalitatea are loc dacă $x = y = z = 2$.

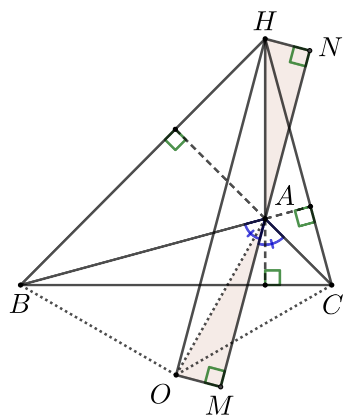
OBJ.167. Într-un triunghi neisoscel ABC, notăm cu O centrul cercului circumscris, cu I centrul cercului înscris, iar cu H ortocentrul. Arătaţi că $AI \parallel OH$, atunci şi numai atunci, când $m(\widehat{BAC}) = 120°$.

Mihai Miculiţa

Soluţia 1: (*Mihai Miculiţa*) Notând cu D al doilea punct de intersecţie a dreptei AI cu cercul circumscris triunghiului ABC şi cu M mijlocul laturii $[BC]$, se ştie că $D \in OM$ şi $AH = 2OM$. De asemenea, $OM \parallel AH$ (ambele perpendiculare pe BC.
Dacă $m(\sphericalangle BAC) = 120°$, patrulaterul $ABDC$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle BDC) = 60°$. Rezultă că triunghiul BCD este echilateral, iar O este centrul său de greutate, deci $OD = 2OM = AH$. Aşadar $AHOD$ este paralelogram, prin urmare $OH \parallel AD$.
Reciproc, dacă $OH \parallel AD$ atunci $AHOD$ este paralelogram, deci $OD = AH = 2OM$. Dar $[DM]$ este mediană în triunghiul BCD, deci O este centrul de greutate al acestuia şi, totodată, centrul cercului său circumscris. Deducem că triunghiul BCD este echilateral, deci $m(\sphericalangle BAC) = 180° - m(\sphericalangle BDC) = 120°$.



Soluţia 2: (*Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti şi Nicuşor Zlota, Focşani*)
Se ştie că diametrul AO şi înălţimea AH sunt izogonale. Dacă unghiul $\widehat{A}$ este ascuţit, atunci punctele O şi H se află de o parte şi de alta a bisectoarei AI, deci nu putem avea $AI \parallel OH$ decât dacă punctele O şi H se află pe bisectoarea AI, caz în care triunghiul ABC este isoscel, ceea ce se exclude prin ipoteză. Rezultă că unghiul $\widehat{A}$ este obtuz, deci punctul O se află în semiplanul determinat de dreapta BC ce nu conţine punctul A, iar punctul H se află în unghiul opus la vârf unghiului $\widehat{A}$. Avem $AI \parallel OH$ dacă şi numai dacă punctele O şi H se află la aceeaşi distanţă de bisectoarea AI.



Fie M şi N proiecţiile punctelor O, respectiv H pe AI. Deducem $AI \parallel OH \Leftrightarrow OM = HN$. Triunghiurile OAM şi HAN sunt dreptunghice prin construcţie şi sunt asemenea, deoarece $(AO$ şi semidreapta opusă lui $(AH$ sunt izogonale în $\widehat{BAC}$. Avem $OA = R$, unde R este lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC. Se ştie că $AH = 2R\,|\cos A|$, unde modulul este necesar, deoarece $\cos A < 0$. Avem astfel:
$OM = HN \Leftrightarrow \triangle OAM \equiv \triangle HAN \Leftrightarrow AO = AH \Leftrightarrow |\cos A| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m(\widehat{A}) = 120°$.

OBJ.168. Fie a, b, $c > 0$. Arătaţi că:
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ac} \geq \frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

Marian Cucoaneş

Soluţie: (*Titu Zvonaru*) Vom demonstra inegalitatea mai tare

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \frac{c^2(a-b)^2+a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)}. \quad (1)$$

Inegalitatea (1) se scrie succesiv

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} - 1 \geq \frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{(a^2+b^2+c^2)^2} - 1 + \frac{c^2(a-b)^2+a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2}{2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)},$$

$$\sum \frac{(a-b)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \sum \frac{ab(a-b)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \sum \frac{c^2(a-b)^2}{2(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)},$$

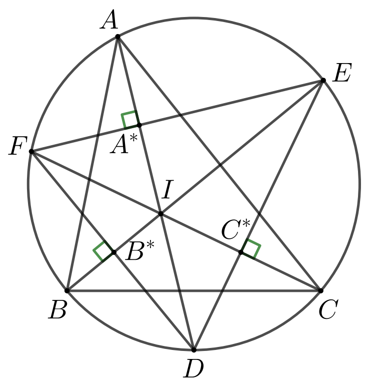
$$\sum (a-b)^2(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-2a^2b^2-2a^2bc-2ab^2c-a^2c^2-b^2c^2-c^4) \geq 0$$

şi, în fine, $\sum (a-b)^2[(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2] \geq 0$ care este evidentă.

OBJ.169. Fie triunghiul ABC înscris în cercul $\mathscr{C}(O,R)$. Notăm cu D, E, F punctele de intersecţie dintre bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ ale triunghiului cu cercul $\mathscr{C}$ şi cu A^*, B^*, C^* intersecţiile dintre EF, DF, DE şi bisectoarele AD, BE, respectiv CF. Arătaţi că $A^*E^2 + B^*F^2 + C^*D^2 = A^*F^2 + B^*D^2 + C^*E^2$.

Gizela Aldica

Soluţie: (*Daniel Văcaru*) Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Să observăm că $m(\widehat{DA^*F})$ este semisuma măsurilor arcelor FBD şi AE. Arcul FDB este suma arcelor FB şi BD, care au ca măsură $m(\sphericalangle C)$, respectiv $m(\sphericalangle A)$. Arcul AE are măsura $m(\sphericalangle B)$. Atunci $m(\widehat{DA^*F}) = \dfrac{m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B)+m(\sphericalangle C)}{2} = 90°$. În consecinţă, triunghiul IA^*F este dreptunghic, aşadar cu teorema lui Pitagora avem $A^*F^2 = IF^2 - A^*I^2$, analog $B^*D^2 = ID^2 - B^*I^2$ şi $C^*E^2 = IE^2 - C^*I^2$.



Utilizând aceste formule, avem: $A^*F^2+B^*D^2+C^*E^2 = IF^2+ID^2+IE^2-A^*I^2-B^*I^2-C^*I^2 = (IF^2-B^*I^2)+(ID^2-C^*I^2)+(IE^2-A^*I^2) = A^*E^2+B^*F^2+C^*D^2$.

OBJ.170. Fiecare dintre numerele $1, 2, \ldots, n$ se colorează cu roşu sau cu albastru. O mutare constă din a alegere trei numere diferite dintre aceste n numere astfel încât unul dintre ele să fie media aritmetică a celorlalte două şi a schimba culoarea celor trei numere alese (din albastru în roşu sau din roşu în albastru). Pentru care valori ale lui n este adevărat că, pornind de la orice colorare a numerelor, printr-o succesiune de asemenea mutări, se pot face toate numerele roşii?

Concursul KöMaL, 2018 (*Róka Sándor*)

Soluţie: Arătăm că putem face toate numerele roşii dacă şi numai dacă $n \geq 8$.
Dacă $n \geq 8$, notăm cu a cel mai mare număr albastru (dacă nu există, am terminat). Recolorând numerele $a-2$, $a-1$, a micşorăm valoarea lui a. Efectând în mod repetat asemenea operaţii putem face ca toate numerele mai mari ca 2 să fie roşii. Dacă şi numerele 1 şi 2 sunt roşii, am terminat. Dacă nu, avem de rezolvat trei cazuri:
Cazul 1: 1 e roşu, 2 e albastru. Efectuăm mutările: $\{2,5,8\}$, $\{5,6,7\}$, $\{6,7,8\}$ care fac ca toate numerele să devină roşii.
Cazul 2: 1 e albastru, 2 e roşu. Efectuăm mutările: $\{1,4,7\}$, $\{4,5,6\}$, $\{5,6,7\}$ care fac ca toate numerele să devină roşii.

Cazul 3: 1 şi 2 sunt albastre. Efectuăm mutările: $\{1,2,3\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,8\}$, $\{6,7,8\}$ care fac ca toate numerele să devină roşii.
Cu asta am arătat că putem face toate numerele roşii dacă $n \geq 8$.
Dacă $n \in \{1,2\}$ şi 1 este albstru, nu putem face toate numerele roşii deoarece nu se poate face nicio mutare.
Dacă $n \in \{3,4\}$, se pot face doar mutările $\{1,2,3\}$ şi (eventual) $\{2,3,4\}$, deci dacă iniţial numerele 2 şi 3 aveau culori diferite, ele vor avea mereu culori diferite.
Dacă $n = 5$, se pot face mutările: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ şi $\{1,3,5\}$. Fiecare mutare schimbă culoarea a exact două dintre numerele 1, 3 şi 4. Dacă iniţial exact unul din cele trei numere era albastru, numărul de numere albastre (dintre 1, 3 şi 4) rămâne mereu impar (adică dintre aceste trei numere fie unul va fi albastru, fie toate trei), deci nu poate deveni 0.
Dacă $n \in \{6,7\}$, se pot face mutările: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,3,5\}$, $\{2,4,6\}$ şi, adiţional în cazul $n = 7$, $\{5,6,7\}$, $\{3,5,7\}$ şi $\{1,4,7\}$. Ne uităm la numerele din mulţimea $\{2,3,5,6\}$. Fiecare mutare schimbă culoarea la exact două dintre numerele din această mulţime (cu excepţia mutării $\{1,4,7\}$ care nu schimbă culoarea nicinuia din cele patru numere). Aşadar, niciuna din mutări nu schimbă paritatea numărului de numere roşii din mulţimea $\{2,3,5,6\}$: dacă la început printre aceste numere aveam un număr impar de numere roşii, vom avea mereu un număr impar, deci nu putem face ca toate aceste patru numere să devină roşii, prin urmare nu putem face ca toate numerele să devină roşii.
În concluzie, putem face numerele roşii dacă $n \geq 8$ şi nu le putem întotdeauna face roşii dacă $n \leq 7$.

OBJ.171. Fie a, b, $c > 0$ cu proprietatea $ab+ac+bc+abc = 4$. Arătaţi că $\frac{a+1}{b+2}+\frac{b+1}{c+2}+\frac{c+1}{a+2} \geq 2$.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: (*Marius Olteanu*)
După aducerea la acelaşi numitor inegalitatea este echivalentă cu
$(a+1)(a+2)(c+2)+(b+1)(b+2)(a+2)+(c+1)(c+2)(b+2) \geq 2(a+2)(b+2)(c+2)$
$\Leftrightarrow a^2c+ab^2+bc^2+2(a^2+b^2+c^2)+3(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+12 \geq 2abc+4(ab+bc+ca)+8(a+b+c)+16 \Leftrightarrow$
$a^2c+ab^2+bc^2+2(a^2+b^2+c^2) \geq 2abc+(ab+bc+ac)+4 \Leftrightarrow$
$a^2c+ab^2+bc^2+2(a^2+b^2+c^2) \geq 2abc+(ab+bc+ac)+(ab+bc+ac)+abc \Leftrightarrow$
$a^2c+ab^2+bc^2+2(a^2+b^2+c^2) \geq 3abc+2(ab+bc+ac)$, inegalitate adevărată deoarece: $a^2c+ab^2+bc^2 \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$, iar $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ac)$, inegalitate binecunoscută.
Soluţie: (*Titu Zvonaru*)
Deoarece $ab+bc+ca+abc = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2} = 1$, putem scrie $\frac{a+1}{b+2}+\frac{b+1}{c+2}+\frac{c+1}{a+2} = \frac{a+2}{b+2}+\frac{b+2}{c+2}+\frac{c+2}{a+2}-\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{a+2}{b+2}\cdot\frac{b+2}{c+2}\cdot\frac{c+2}{a+2}}-1 = 2.$
Soluţie: (*Daniel Văcaru, Marin Chirciu şi Octavian Stroe*)
Cu inegalitatea lui Bergström obţinem $\frac{a+1}{b+2}+\frac{b+1}{c+2}+\frac{c+1}{a+2} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)(b+2)}+\frac{(b+1)^2}{(b+1)(c+2)}+\frac{(c+1)^2}{(c+1)(a+2)} \geq \frac{(a+b+c+3)^2}{(a+1)(b+2)+(b+1)(c+2)+(c+1)(a+2)} = \frac{(a+b+c)^2+6(a+b+c)+9}{ab+bc+ca+3(a+b+c)+6} \geq 2$, unde ultima inegalitate este echivalentă cu $a^2+b^2+c^2 \geq 3$. (1)
Pentru a demonstra concluzia este suficient să arătăm că este adevărată inegalitatea (1). Folosind relaţia din ipoteză şi inegalitatea mediilor avem

$4 = ab + bc + ca + abc \geq 4\sqrt[4]{(abc)^3}$, cu egalitate pentru $ab = bc = ca = abc$, adică pentru $a = b = c = 1$, de unde $abc \leq 1$. (2)
Folosind din nou relaţia din ipoteză şi (2), rezultă $ab+bc+ca = 4-abc \geq 3$, deci $ab+bc+ca \geq 3$. (3).
Din inegalitatea $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ şi (3) obţinem $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$, adică (1), ceea ce trebuia demonstrat. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.
Remarcă. Inegalitatea se poate generaliza:
Fie a, b, $c \in (0, \infty)$ cu proprietatea $ab + bc + ca + abc = 4$ şi $n \geq 1$. Arătaţi că $\dfrac{a+1}{b+n} + \dfrac{b+1}{c+n} + \dfrac{c+1}{a+n} \geq \dfrac{6}{n+1}$.

Marin Chirciu şi Octavian Stroe

RMT 3/2019

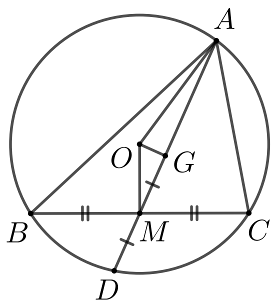
OBJ.172. Determinaţi numerele naturale n pentru care numărul $10^{8n+5} - 4$ se divide cu 641.

Corneliu Mănescu-Avram

Soluţie: Numărul 641 este prim. Avem $10^5 = 641 \cdot 156 + 4 \equiv 4 \pmod{641}$, $10^8 = 641 \cdot 156006 + 154 \equiv 154 \pmod{641}$, aşadar $10^{8n+5}-4 = (10^8)^n \cdot 10^5 - 4 \equiv 154^n \cdot 4 - 4 \equiv 4(154^n - 1) \pmod{641}$.
Rezultă că $10^{8n+5} - 4 \equiv 0 \pmod{641}$ dacă şi numai dacă $154^n \equiv 1 \pmod{641}$.
Dar $154^2 = 641 \cdot 37 - 1 \equiv -1 \pmod{641}$, $154^3 \equiv -154 \pmod{641}$, $154^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{641}$, de unde $154^{4k+r} \equiv 154^r \pmod{641}$, pentru $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Am dedus astfel că $154^n \equiv 1 \pmod{641} \Leftrightarrow 4 \mid n$.
Aşadar, numărul $10^{8n+5} - 4$ se divide cu 641 dacă şi numai dacă n se divide cu 4.

OBJ.173. Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului neechilateral ABC, iar G este centrul de greutate al acestuia, demonstraţi că $OG \perp AG$ dacă şi numai dacă $AB^2+AC^2 = 2BC^2$.

Mihai Miculiţa



Soluţia 1: Fie M mijlocul laturii $[BC]$ şi D punctul în care dreapta AG intersectează a doua oară cercul circumscris tringhiului ABC. Din puterea punctului M faţă de acest cerc rezultă $BM \cdot CM = AM \cdot DM$. Dacă $OG \perp AG$, atunci G este mijlocul segmentului $[AD]$, deci $DM = \dfrac{AM}{3}$. Egalitatea precedentă revine la $\dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{AM^2}{3}$, de unde, cu formula medianei,

$3BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2$, adică $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$. Reciproc, relaţia $AB^2 + AC^2 = 2BC^2$ înseamnă $\dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{AM^2}{3}$. Dar, aşa cum am văzut, avem şi $\dfrac{BC^2}{4} = AM \cdot DM$. Aşadar $DM = \dfrac{AM}{3} = GM$, deci G este mijlocul lui $[AD]$, ceea ce înseamnă că $OG \perp AD$.
Soluţia 2: (*Corneliu Mănescu-Avram, Daniel Văcaru, Nicuşor Zlota*)
Cu notaţiile obişnuite într-un triunghi, este cunoscut că $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$ şi că $AG^2 = \dfrac{4}{9}m_a^2 = \dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{9}$. Cum $OA = R$, avem următorul lanţ de echivalenţe: $OG \perp AD \Leftrightarrow AG^2 + OG^2 = AO^2 \Leftrightarrow$

$$\frac{2b^2+2c^2-a^2}{9}+R^2-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}=R^2 \Leftrightarrow b^2+c^2=2a^2.$$

OBJ.174. Fie a, b, c, $d>0$ astfel încât $a^4b^3+b^4c^3+c^4d^3+d^4a^3+abcd=5$. Demonstraţi că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq a+b+c+d$.

Marian Cucoaneş

Soluţie: Cu inegalitatea mediilor, folosind condiţia din enunţ, avem:

$$5+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=\left(a^4b^3+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)+\left(b^4c^3+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}\right)+$$
$$\left(c^4d^3+\frac{1}{d}+\frac{1}{d}+\frac{1}{d}\right)+\left(d^4a^3+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}\right)+\left(abcd+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq$$
$$4\sqrt[4]{a^4b^3\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b}}+4\sqrt[4]{b^4c^3\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}}+4\sqrt[4]{c^4d^3\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{d}\cdot\frac{1}{d}}+4\sqrt[4]{d^4a^3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}}+$$
$5\sqrt[5]{abcd\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{d}}=4a+4b+4c+4d+5$, de unde rezultă inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă $a=b=c=d=1$.

OBJ.175. Determinaţi perechile de numere naturale nenule (m,n) pentru care $n^m-2m \mid m^2+2m$.

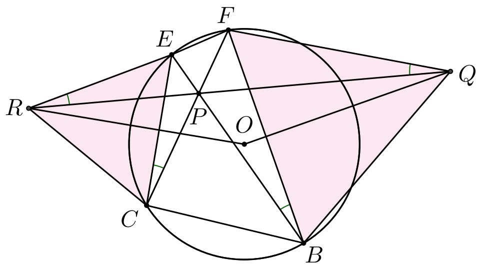
Mihaela Berindeanu

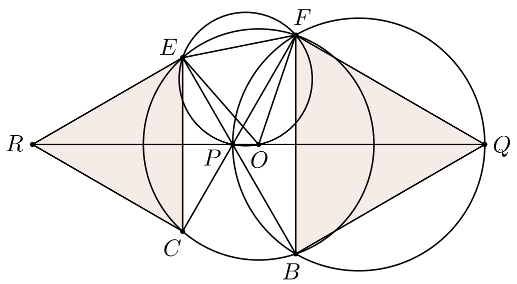
Soluţie: Pentru $n\geq 2\Rightarrow 2^m-2m\leq n^m-2m\leq m^2+2m\Rightarrow 2^m\leq m^2+4m\Rightarrow m\in\{1,2,3,4,5\}$.
Pentru $m=1\Rightarrow\ n-2\mid 3\Rightarrow n-2\in\{1,3\}\Rightarrow n\in\{3,5\}$. Se obţin soluţiile $m=1$, $n=3$ şi $m=1$, $n=5$.
Pentru $m=2\Rightarrow n^2-4\mid 8\Rightarrow n^2-4\in\{1,2,4,8\}$, fără soluţii în $\mathbb{N}$.
Pentru $m=3\Rightarrow n^3-6\mid 15\Rightarrow n^3-6\in\{1,3,5,15\}$, fără soluţii în $\mathbb{N}$.
Pentru $m=4\Rightarrow n^4-8\mid 24\Rightarrow n^4-8\in\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$. Singura variantă acceptată este $n^4-8=8\Rightarrow n^4=16\Rightarrow n=2$, deci obţinem soluţia $(m,n)=(4,2)$.
Pentru $m=5\Rightarrow n^5-10\mid 35$, fără soluţii în $\mathbb{N}$.
Pentru $n=1\Rightarrow 1-2m\mid m^2+2m$
Dar $1-2m\mid m(1-2m)$ sau $1-2m\mid -2m^2+m\Rightarrow 1-2m\mid 2\left(m^2+2m\right)-2m^2+m$, deci $1-2m\mid 5m\Rightarrow 1-2m\mid 10m\Rightarrow 1-2m\mid 5(1-2m)\Rightarrow 1-2m\mid 5\Rightarrow 1-2m\in\{\pm1,\pm5\}$, adică $m\in\{-2,0,1,3\}$.
Se aleg variantele pozitive $m=1,\ m=3$ deci ultimele două soluţii (m,n) sunt $(1,1)$ şi $(3,1)$.
În concluzie, există cinci soluţii (m,n): $(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(4,2)$.

OBJ.176. În cercul $\mathscr{C}$, de centru O, coardele $[EB]$ şi $[CF]$ se intersectează în punctul P şi $m(\widehat{EPC})=120°$. Pe laturile $[BF]$ şi $[CE]$ ale patrulaterului $BCEF$, în exteriorul acestuia, se construiesc triunghiurile echilaterale BFQ şi CER. Arătaţi că $OQ=OR$.

Petru Braica şi Ştefan Dominte

Soluţie: Patrulaterele $PERC$ şi $PFQB$ sunt inscriptibile, deci în jurul punctului P se formează şase unghiuri de $60°$. Rezultă că punctele Q,P,R sunt coliniare şi atunci $m(\sphericalangle PRE)=m(\sphericalangle PCE)=m(\sphericalangle PBF)=m(\sphericalangle PQF)\overset{\text{not}}{=}\alpha$. Pe de altă parte, punctele O şi R se află pe mediatoarea segmentului $[CE]$, deci (RO este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CRE$, prin urmare $m(\sphericalangle ORE)=30°$ şi, analog, $m(\sphericalangle OQF)=30°$. Rezultă că $m(\sphericalangle ORP)=m(\sphericalangle OQP)=|\alpha-30°|$. Dacă $\alpha\neq 30°$, rezultă că triunghiul OQR este isoscel, deci $OQ=OR$. Dacă $\alpha=30°$, punctele O,P,Q,R sunt coliniare şi $CE\parallel BF$. Avem $m(\sphericalangle EOF)=2m(\sphericalangle EBF)=60°$ şi, cum $OE=OF$, triunghiul EOF este echilateral. Dar şi $m(\sphericalangle EPF)=60°$, deci punctele E,P,O,F sunt conciclice. Dacă $CE=BF$, concluzia este evidentă. Dacă $CE<BF$ (cazul $CE>BF$ este similar), atunci patrulaterul $EPOF$ este inscriptibil, iar din *teorema lui van Schooten* rezultă că $PF=PO+PE$. Din aceeaşi teoremă avem şi relaţiile $PR=PE+PC=2PE$ şi $PQ=PF+PB=2PF$ şi atunci $OR=OP+PR=(PF-PE)+2PE=PF+PE$ şi $OQ=PQ-PO=2PF-(PF-PE)=PF+PE=OR$.





OBJ.177. Fie a_1, a_2, ... , a_n numere reale. Considerăm cele $2^n - 1$ sume care se obţin adunând o parte din aceste numere (o sumă poate avea şi un singur termen). Cât de multe dintre aceste sume pot fi pozitive?

Concursul KöMaL

Soluţie: Demonstrăm, prin inducţie după n, că numărul sumelor pozitive poate fi orice număr de la 0 la $2^n - 1$. Dacă $n = 1$, alegând $a_1 \leq 0$, nu avem nicio sumă pozitivă şi alegând $a_1 > 0$ avem o sumă pozitivă. Să presupunem că am arătat deja că pentru n numere se pot obţine oricâte sume pozitive de la 0 la $2^n - 1$. Fie acum $0 \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ şi arătăm că există $n + 1$ numere astfel încât exact k dintre sumele acestora să fie pozitive. Dacă $0 \leq k \leq 2^n - 1$, ştim din ipoteza de inducţie că există n numere, astfel încât k dintre sumele lor să fie pozitive. Alegând al $n + 1$-lea număr să fie negativ, cu modulul mai mare decât suma modulelor celorlalte n numere, orice sumă care conţine acest număr va fi negativă, deci pozitive vor rămâne exact k dintre sume. Dacă $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$, notând $j = k - 2^n$, avem $0 \leq j \leq 2^n - 1$, deci, în baza ipotezei de inducţie, putem alege n numere astfel încât exact j dintre sumele lor să fie negative. Alegând acum al $n+1$-lea număr să fie pozitiv, mai mare decât suma modulelor celorlalte n numere, orice sumă care conţine acest număr va fi pozitivă, deci vom avea exact $j + 2^n = k$ sume pozitive. Cu aceasta inducţia este încheiată.

OBJ.178. Pe o tablă de şah sunt plasate 8 ture, nicicare două situate pe o aceeaşi linie sau coloană. Definim distanţa dintre două ture ca fiind distanţa dintre centrele pătrăţelelor pe care se află acestea. Demonstraţi că măsurând toate distanţele dintre două turnuri, vom găsi cel puţin două distanţe egale.

Olimpiadă Rusia, 2002

Soluţia 1: Presupunând pătrăţelele tablei ca fiind de latură 1, ne uităm ce valori poate lua distanţa dintre două ture. Distanţa pe orizontală (diferenţa dintre coloane) poate fi $1, 2, \ldots, 7$, iar distanţa pe verticală (diferenţa dintre linii), la fel, poate fi de la 1 la 7. Aşadar, distanţa dintre două ture este un număr de forma $\sqrt{x^2 + y^2}$, unde $x, y \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Putem presupune $x \geq y$. (Valorile care se obţin pentru perechea (a, b) cu $b > a$ se obţin şi pentru perechea (b, a).) Cu $x = 1$ se obţine atunci o valoare ($\sqrt{1^2 + 1^2}$), pentru $x = 2$ se obţin două valori ($\sqrt{2^2 + 1^2}$ şi $\sqrt{2^2 + 2^2}$), ş.a.m.d., pentru $x = 7$ se obţin 7 valori, în total $1 + 2 + \ldots + 7 = 28$ de valori. Însă $\sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{5^2 + 5^2}$, deci de fapt sunt cel mult 27 de valori diferite pe care le poate lua distanţa dintre două ture. Însă sunt 28 de perechi de ture şi doar 27 de valori posibile pentru distanţa dintre două ture, deci, conform principiului cutiei, vor exista două perechi de ture (nu neapărat disjuncte), între care distanţa este aceeaşi.

Soluţia 2: (*Nicuşor Zlota, Focşani*)

Considerăm cele 7 perechi formate din turnuri situate în coloane vecine. Diferenţele dintre coordonatele lor pe verticală sunt cuprinse între 1 şi 7 inclusiv, deci fie două dintre aceste diferenţe coincid (şi astfel coincid şi distanţele dintre perechile respective), fie printre ele se află toate numerele de la 1 la 7. Deducem că exist? două turnuri la distanţă 2 pe verticală şi la distanţă 1 pe orizontală (perechea 1). La fel, există fie două perechi de turnuri în linii vecine cu distanţele dintre ele egale, fie două turnuri situate la distanţă 1 pe verticală şi la distanţă 2 pe orizontală (perechea 2). Rezultă că distanţele dintre turnuri în perechea 1, respectiv perechea 2, coincid.

OBJ.179. Arătaţi că dacă $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $(x^2+y^2)^3 \geq 2xy(3x^2-y^2)(x^2-3y^2)$. Când are loc egalitatea?

Gheorghe Stoica

Soluţia 1: După calcule, inegalitatea se scrie $x^6-6x^5y+3x^4y^2+20x^3y^3+3x^2y^4-6xy^5+y^6 \geq 0$. Dacă $y=0$ inegalitatea este evidentă. Dacă nu, împărţim inegalitatea cu $y^6>0$ şi notăm $u=\frac{x}{y}$. Inegalitatea de demonstrat este $u^6-6u^5+3u^4+20u^3+3u^2-6u+1 \geq 0$. Dacă $u=0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $u>0$, împărţim cu $u^3>0$ şi notăm $t=u+\frac{1}{u}>0$. Avem $u^2+\frac{1}{u^2}=t^2-2$ şi $u^3+\frac{1}{u^3}=t^3-3t$, deci inegalitatea de demonstrat revine la $\left(u^3+\frac{1}{u^3}\right)-6\left(u^2+\frac{1}{u^2}\right)+3\left(u+\frac{1}{u}\right)+20 \geq 0$, adică $t^3-3t-6(t^2-2)+3t+20 \geq 0$, care se scrie $(t-4)^2(t+2) \geq 0$, inegalitate evidentă, cu egalitate dacă $t=4$, adică $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=4$, ceea ce revine la $\frac{x}{y}=2 \pm \sqrt{3}$, adică $x=\alpha$, $y=(2\pm\sqrt{3})\alpha$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă $u<0$, procedând similar (la împărţirea prin $u^3<0$ se schimbă sensul inegalităţii), se ajunge la inegalitatea $(t-4)^2(t+2) \leq 0$, adevărată deoarece $t=u+\frac{1}{u} \leq -2$ dacă $u<0$. În acest caz avem egalitate dacă $t=-2$, adică $u=-1$, ceea ce înseamnă $y=-x$ (numere opuse arbitrare).
Remarcă: *Nicuşor Zlota* rezumă cele de mai sus rescriind inegalitatea sub forma $(u+1)^2(u^2-4u+1)^2 \geq 0$. De aici, concluzia, inclusiv cazurile de egalitate, rezultă uşor.
Remarcă: Dacă notăm cu $a=\sqrt{x^2+y^2}$, atunci există $t \in [0, 2\pi)$ astfel ca $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. Inegalitatea revine atunci la $a^6 \geq 2a^6(4\sin^3 t-3\sin t)(3\cos t-4\cos^3 t)$. Dacă $a=0$ (adică $x=y=0$), inegalitatea este evidentă, dacă nu, ea revine la $2\sin 3t\cos 3t \leq 1$, adică $\sin 6t \leq 1$, inegalitate evidentă.
Soluţia 2: (*Corneliu Mănescu-Avram*)
Notăm $x+y=s$, $xy=p$. Avem $x^2+y^2=s^2-2p$, $(3x^2-y^2)(x^2-3y^2)=3(x^4+y^4)-10x^2y^2=3[(s^2-2p)^2-2p^2]-10p^2=3s^4-12s^2p-4p^2$ şi inegalitatea de demonstrat devine $(s^2-2p)^3 \geq 2p(3s^4-12s^2p-4p^2)$, echivalentă cu $[s(s^2-6p)]^2 \geq 0$, care este adevărată. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $s=0$ sau $s^2-6p=0$. Dar $s=0$ înseamnă $x+y=0$, iar $s^2-6p=0$ este echivalentă cu $y=(2\pm\sqrt{3})x$.

RMT 4/2019

OBJ.180. Fiind date numerele $A=\underbrace{44\ldots4}_{n \text{ cifre}}$ şi $B=\underbrace{88\ldots8}_{2n \text{ cifre}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, arătaţi că numărul $2A+B+4$ este suma pătratelor a două numere pare consecutive.

Radu Ghenghiu

Soluţia 1: (*Daniel Văcaru*) Avem $A=\frac{4(10^n-1)}{9}$ şi $B=\frac{8(10^{2n}-1)}{9}$, deci $2A+B+4=\frac{8\cdot10^{2n}+8\cdot10^n+20}{9}=\frac{4\cdot10^{2n}-8\cdot10^n+4}{9}+\frac{4\cdot10^{2n}+16\cdot10^n+16}{9}=\left(\frac{2\cdot10^n-2}{3}\right)^2+\left(\frac{2\cdot10^n+4}{3}\right)^2$. Evident $\frac{2\cdot10^n-2}{3}$ şi $\frac{2\cdot10^n+4}{3}$ sunt numere naturale pare (au numărătorul par şi divizibil cu 3), consecutive.

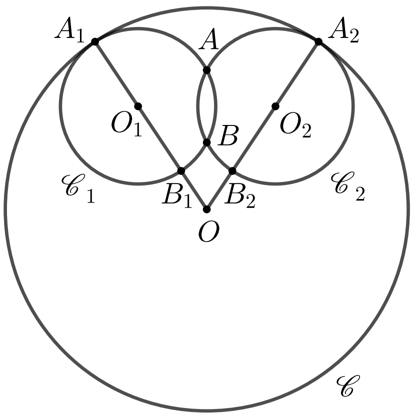
Soluţia 2: (*Corneliu-Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota*) Determinăm $u \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $2A+B+4 = (2u)^2+(2u+2)^2$, adică $8(\underbrace{11\dots1}_{2n \text{ cifre}}+\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cifre}})+4 = 8u^2+8u+4$, deci $\underbrace{11\dots1}_{2n \text{ cifre}}+\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cifre}} = u(u+1)$.

Dar $\underbrace{11\dots1}_{2n \text{ cifre}}+\underbrace{11\dots1}_{n \text{ cifre}} = \frac{10^{2n}-1}{9} + \frac{10^n-1}{9} = \frac{10^n-1}{3}\cdot\frac{10^n+2}{3}$, deci $u = \frac{10^n-1}{3} \in \mathbb{N}$.

Remarcă: Dacă renotăm $A = \underbrace{44\dots4}_{2n \text{ cifre}}$ şi $B = \underbrace{88\dots8}_{n \text{ cifre}}$, problema de faţă cere să arătăm că $2A+B+4$ se scrie ca suma pătratelor a două numere pare consecutive. Ori $2A+B+4 = (A-B)+(A+2B+4)$. Problema 1 de la OBMJ 2003 cerea să se arate că $A+2B+4$ este pătrat perfect. La fel se arată şi că $A-B$ este pătrat perfect. Se obţine: $2A+B+4 = (\underbrace{66\dots6}_{n \text{ cifre}})^2+(\underbrace{66\dots6}_{n-1 \text{ cifre}}8)^2$.

OBJ.181. Fie $\mathscr{C}_1(O_1,R_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_2,R_2)$ două cercuri tangente interior la cercul $\mathscr{C}(O,R)$. Dacă $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A,B\}$, atunci arătaţi că $O \in AB$ dacă şi numai dacă $R_1 = R_2$.

Andrei Eckstein



Soluţie: Fie A_i punctul de contract al cercului $\mathscr{C}_i$ cu cercul $\mathscr{C}$, $i = 1,2$. Punctele O, O_i şi A_i sunt coliniare. (OA_i şi O_iA_i sunt ambele perpendiculare pe tangenta comună cercurilor $\mathscr{C}_i$ şi $\mathscr{C}$.) Notăm cu B_i al doilea punct de intersecţie a lui OO_i cu cercul $\mathscr{C}_i$.
Deoarece AB este axa radicală a cercurilor $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$, condiţia $O \in AB$ este echivalentă cu faptul că O are puteri egale faţă de cele două cercuri, adică $OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2$, adică $R(R-2R_1) = R(R-2R_2)$, adică $R_1 = R_2$.

OBJ.182. Numerele naturale a şi b, satisfac $a > b$. De asemenea, numerele $ab-1$, $a+b$ sunt prime între ele şi la fel sunt şi numerele $ab+1$, $a-b$. Demonstraţi că $(a+b)^2+(ab-1)^2$ nu este pătrat perfect.

Olimpiadă Iran, 2011

Soluţie: (*Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota*)
Avem $(ab-1, a+b) = (ab+1, a-b) = 1$. Vom folosi egalităţile

$$(a+b)^2+(ab-1)^2 = (a-b)^2+(ab+1)^2 = (a^2+1)(b^2+1) \qquad (1).$$

Demonstrăm mai întâi că $(a^2+1, b^2+1) = 1$. Fie, prin absurd, p un număr prim astfel ca $p \mid (a^2+1, b^2+1)$. Atunci $p \mid (a^2+1)-(b^2+1)$, adică $p \mid (a-b)(a+b)$.
Cazul 1. $p \mid a-b$. Folosind (1) avem următorul şir de implicaţii:
$p \mid (ab+1)^2 \Rightarrow p \mid ab+1 \Rightarrow p \mid (ab+1, a-b) \Rightarrow p \mid 1$, contradicţie.
Cazul 2. $p \mid a+b$ se tratează analog.
Demonstrăm acum că $(a+b)^2+(ab-1)^2$ nu este pătrat perfect. Presupunem, prin absurd, că numărul este pătrat perfect şi deducem că factorii a^2+1 şi b^2+1 sunt pătrate perfecte deoarece sunt numere prime între ele. Acest fapt reprezintă însă o contradicţie deoarece nu există pătrate perfecte de forma a^2+1, cu a număr natural nenul.

OBJ.183. Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x,y,z,t) = x^2+y^2+z^2+t^2+\frac{4}{3}(xy+xz+xt+yz+yt+zt)+x+y+z+t$, atunci când $x,y,z,t \in \mathbb{R}$.

Gheorghe Szöllősy

Soluţie: $E(x,y,z,t) = \dfrac{(y+z+t+\frac{1}{2})^2}{3} + \dfrac{(x+z+t+\frac{1}{2})^2}{3} + \dfrac{(x+y+t+\frac{1}{2})^2}{3} + \dfrac{(x+y+z+\frac{1}{2})^2}{3} - \dfrac{1}{3}$, deci $E(x,y,z,t) \geq -\dfrac{1}{3}$, cu egalitate dacă
$x+y+z = x+y+t = x+z+t = y+z+t = -\dfrac{1}{2}$, adică pentru $x=y=z=t=-\dfrac{1}{6}$. Aşadar minimul cerut este $-\dfrac{1}{3}$.

Remarcă: O soluţie mai puţin elegantă dar care nu necesită inspiraţie constă în a privi expresia $E(x,y,z,t)$ ca pe o expresie de gradul II în x. Atunci $E(x,y,z,t) = \left(x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + F(y,z,t)$. Considerând $F(y,z,t)$ ca pe o expresie de gradul II în y şi continuând în acelaşi mod apoi cu variabilele z şi t se obţine: $E(x,y,z,t) = \left(x + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z + \dfrac{2}{3}t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{9}\left(y + \dfrac{2}{5}z + \dfrac{2}{5}t + \dfrac{3}{10}\right)^2 + \dfrac{7}{15}\left(z + \dfrac{2}{7}t + \dfrac{3}{14}\right)^2 + \dfrac{3}{7}\left(t + \dfrac{1}{6}\right)^2 - \dfrac{1}{3}$. De aici se vede că valoarea minimă este $-\dfrac{1}{3}$, atinsă atunci când fiecare din cele patru pătrate este 0, lucru posibil! Se determină cazul de egalitate rezolvând un sistem.

OBJ.184. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a+b+c+abc = 14$. Arătaţi că

$$\left(1 + ab + \frac{b}{c}\right)\left(1 + bc + \frac{c}{a}\right)\left(1 + ca + \frac{a}{b}\right) \geq 216.$$

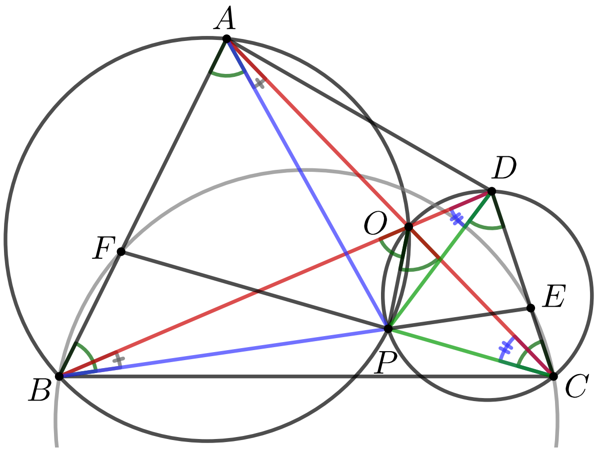
Mihaela Berindeanu

Soluţie: (*Daniel Văcaru*) O scriere alternativă e inegalităţii este
$(a+b+abc)(b+c+abc)(c+a+abc) \geq 216abc$, sau $(14-a)(14-b)(14-c) \geq 216abc$, adică $14^3 - 14^2(a+b+c) + 14(ab+bc+ca) - abc \geq 216abc$, deci $14^3 - 14^2(14-abc) + 14(ab+bc+ca) - abc \geq 216abc$ care revine la $196abc + 14(ab+bc+ca) - abc \geq 216abc$, deci la $14(ab+bc+ca) \geq 21abc$ şi, în fine, la $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{3}{2}$ (1).
Pe de altă parte, cum $a+b+c+abc = 14$, deducem $14 = a+b+c+abc \geq 3\sqrt[3]{abc} + abc$. Să notăm $x = \sqrt[3]{abc}$. Atunci $x^3 + 3x \leq 14 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+2x+7) \leq 0$, deci $\sqrt[3]{abc} \leq 2$ (2).
Dar din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}} \overset{(2)}{\geq} \dfrac{3}{2}$, adică (1).
Egalitatea are loc dacă $a = b = c = 2$.

OBJ.185. În patrulaterul convex $ABCD$, notăm cu O punctul de intersecţie a diagonalelor şi cu P cel de-al doilea punct de intersecţie a cercurilor circumscrise triunghiurilor OAB şi OCD. Dacă $P \in int(\Delta OBC)$, $\{E\} = BP \cap [CD]$ şi $\{F\} = CP \cap [AB]$, arătaţi că patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil atunci şi numai atunci când $[AC] \equiv [BD]$.

Mihai Miculiţa

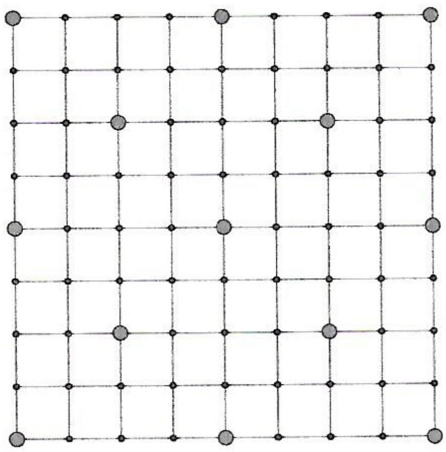
Soluţie: Patrulaterele $ABPO$ şi $CDOP$ fiind inscriptibile, deducem că $\sphericalangle PAC \equiv \sphericalangle PBD$, $\sphericalangle PCA \equiv \sphericalangle PDB$, $\sphericalangle PAB \equiv \sphericalangle POB \equiv \sphericalangle PCD$ şi $\sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle POC \equiv \sphericalangle PDC$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Presupunem că $BCEF$ este inscriptibil şi demonstrăm că $AC = BD$.
$BCED$ inscriptibil implică $\sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle PBA$, ceea ce, împreună cu egalităţile de unghiuri deduse mai sus, implică $\sphericalangle PBA \equiv \sphericalangle PAB$. Aşadar triunghiul ABP este isoscel, cu $PA = PB$. Rezultă că triunghiurile PAC şi PBD sunt congruente (LUU), deci $AC = BD$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Presupunem că $AC = BD$ şi demonstrăm că $BCEF$ este inscriptibil.
Triunghiurile PAC şi PBD sunt congruente (ULU), deci şi înălţimile din P în cele două triunghiuri sunt congruente, adică $d(P, AC) = d(P, BD)$. Deducem că P se află pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$, deci $\sphericalangle FBP \equiv \sphericalangle POC \equiv \sphericalangle POB \equiv \sphericalangle PCE$, adică patrulaterul $BCEF$ este inscriptibil.

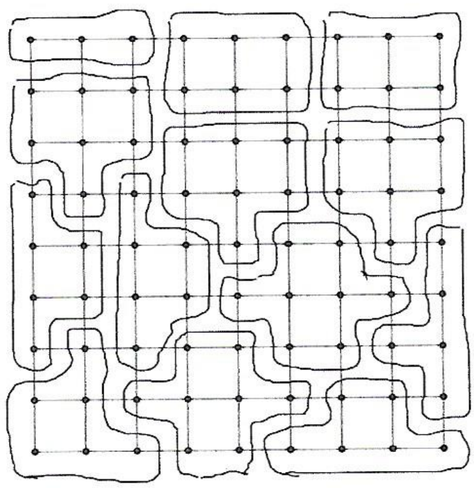


OBJ.186. Un pătrat de latură 8 este împărţit în 64 de pătrate de latură 1 prin linii orizontale şi verticale. Astfel se obţine o reţea cu 81 de noduri aflate în vârfurile pătratelor unitate. „Distanţa" dintre două noduri ale reţelei este lungimea celui mai scurt drum între cele două noduri, drum format numai din segmente orizontale sau verticale ale reţelei. Aflaţi cel mai mic număr natural n cu proprietatea că, oricum am alege n noduri ale reţelei, există două noduri dintre cele alese care se află la „distanţă" mai mică sau egală cu 3.

Traian Preda

Soluţie: Nicicare două din cele 13 puncte marcate mai pronunţat în figura din stânga nu sunt la distanţa 3 sau mai mică. Aşadar $n \geq 14$. Vom arăta că $n = 14$. Grupăm cele 81 de noduri în 13 grupe (înconjurate de câte o linie curbă în figura din dreapta) astfel încât distanţa între oricare două noduri aflate în aceeaşi grupă să fie cel mult 3. Având 14 noduri şi 13 grupe, din principiul cutiei rezultă că oricum am alege 14 noduri, există printre ele două care fac parte din aceeaşi grupă, adică există două noduri aflate la distanţă cel mult 3.





RMT 1/2020

OBJ.187. Determinaţi mulţimea $\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid \sqrt{3^x+4^y}\in\mathbb{N}\}$.

Neculai Stanciu

Soluţie: Determinăm perechile $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ pentru care 3^x+4^y este un pătrat perfect, să îi zicem z^2. Scriem ecuaţia sub forma $3^x=(z-2^y)(z+2^y)$ şi deducem că $z-2^y$ şi $z+2^y$ trebuie să fie puteri ale lui 3. Dar diferenţa lor, 2^{y+1}, nu este divizibilă cu 3, deci trebuie ca $z-2^y=1$, $z+2^y=3^x$, deci $2^{y+1}=3^x-1$. Dacă $y=0$ obţinem $x=1$. Dacă $y>0$, atunci $4\mid 2^{y+1}=(4-1)^x-1$, deci x este par. Atunci $x=2k$, $k\in\mathbb{N}$ şi $2^{y+1}=(3^k-1)(3^k+1)$. Factorii 3^k-1 şi 3^k+1 sunt puteri ale lui 2 care diferă prin 2, deci sunt 2 şi 4. Deducem că $k=1$, deci $x=2$ şi $y=2$. Aşadar mulţimea căutată este $\{(1,0),\,(2,2)\}$.
Am primit soluţii de la *Daniel Văcaru, Corneliu Mănescu-Avram* şi *Nicuşor Zlota.*

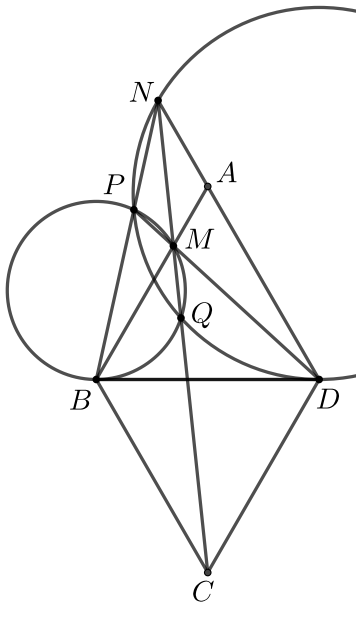
OBJ.188. Determinaţi numerele naturale x şi y pentru care $2^x=y^2+y+4$.

Adela Grădinaru şi Lucian Petrescu

Soluţie: Dacă x este impar, $2^x\equiv 2 \pmod 3$, în timp ce $y^2+y+4\equiv 0,1 \pmod 3$. Dacă x este par, 2^x este pătrat perfect, iar $y^2<y^2+y+4<y^2+2y+1$ dacă $y>3$, deci nu putem avea soluţii decât dacă $y\in\{0,1,2,3\}$. Verificând aceste valori, obţinem soluţiile $x=2$, $y=0$ şi $x=4$, $y=3$.
Cazul x impar poate fi exclus şi pe considerente de ultimă cifră.
Am mai primit soluţii de la *Marin Chirciu* şi *Octavian Stroe*, de la *Daniel Văcaru* şi de la *Corneliu Mănescu-Avram*, singur şi în colaborare cu *Nicuşor Zlota.*

OBJ.189. Fie $ABCD$ un romb în care $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. O dreaptă oarecare, d, care trece prin C, intersectează dreptele AB şi AD în M, respectiv N. Dreptele BN şi DM se taie în P. Cercurile circumscrise triunghiurilor BPM şi DPN se taie a doua oară în Q. Arătaţi că:
a) Centrul cercului circumscris triunghiului MNP se află pe AC.
b) Dreapta PQ trece printr-un punct fix atunci când d variază.
c) Punctul Q este punctul lui Torricelli pentru triunghiurile BDM şi BDN. **(enunţ corectat)**

Stan Fulger



Soluţie: Tratăm numai cazurile $M\in(AB)$ şi $C\in(MN)$, celălalte cazuri fiind analoage.
I. $M\in(AB)$. Avem că $\Delta MBC\sim\Delta MAN\sim\Delta CDN$, deci $\dfrac{MB}{DC}=\dfrac{CB}{ND}$, adică $\dfrac{MB}{BD}=\dfrac{DB}{ND}$. Cum $\sphericalangle MBD\equiv\sphericalangle BDN$, rezultă că $\Delta MBD\sim\Delta BDN$, deci $m(\sphericalangle BPD)=180^\circ-m(\sphericalangle PBD)-m(\sphericalangle PDB)=180^\circ-m(\sphericalangle BMD)-m(\sphericalangle MDB)=m(\sphericalangle MBD)=60^\circ$. Rezultă că BD este tangentă cercurilor circumscrise triunghiurilor NPD şi BMP ($m(\sphericalangle PDB)=m(\sphericalangle PND)=m(PD)$ şi $m(\sphericalangle MBD)=m(\sphericalangle BPM)=m(BM)$)

a) Scriind puterea punctului D faţă de cercul circumscris lui BMP, apoi cea a punctului B faţă de cercul circumscris lui NPD, deducem că $DM \cdot DP = BD^2 = BP \cdot BN$, ceea ce arată că punctele B şi D au aceeaşi putere faţă de cercul circumscris triunghiului MNP. Rezultă că ele sunt egal depărtate de centrul acestuia. Va rezulta că acest centru se află pe madiatoarea lui $[BD]$, adică pe AC.
b) PQ este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor BMP şi NPD, deci trece prin mijlocul tangentei lor comune exterioare, adică prin mijlocul lui $[BC]$.
c) Deoarece $m(\sphericalangle NQB) = m(\sphericalangle NQD) = 120°$, Q este punctul lui Torricelli al triunghiurilor BDM şi BDN.
Alte proprietăţi interesante ale configuraţiei:
- patrulaterul $APBD$ este inscriptibil;
- Q este punctul lui Micquel al patrulaterului $NPMA$, deci şi patrulaterele $AMQD$ şi $NAQB$ sunt inscriptibile.
$BQDC$ este inscriptibil şi $m(\sphericalangle BQC) = 60°$ implică N, M, Q, C - coliniare.
II. Cazul $C \in [MN]$ este similar celui tratat mai sus. La fel rezultă $\sphericalangle BPD \equiv \sphericalangle MBD$, doar că în acest caz $m(\sphericalangle MBD) = 120°$. La fel, BD este tangentă cercurilor circumscrise triunghiurilor NMD şi BMP. Subpunctele **a)** şi **b)** se demonstrează la fel, însă subpunctul **c)** nu mai rămâne adevărat.

OBJ.190. Fie $n \geq 2$ un număr natural fixat. n copii au o minge pe care o pasează de la unul la altul respectând următoarea regulă: dacă jucătorul A i-a pasat deja o dată mingea jucătorului B, atunci el nu îi mai poate pasa din nou lui B. Care este numărul maxim de pase pe care le pot face copiii?

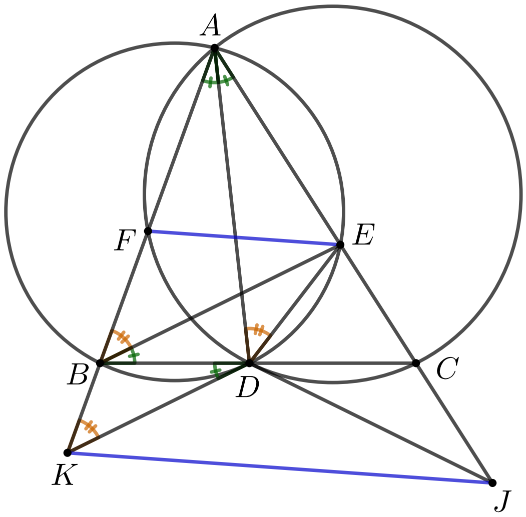
Andrei Eckstein

Soluţie: Copiii pot face $n(n-1)$ pase, adică fiecare din cei n copii le poate pasa celorlalţi $n-1$ mingea câte o singură dată. Iată o modalitate de a face acest lucru. De exemplu, ii punem pe copii să stea în cerc. Fiecare jucator, când primeste mingea, face schimb de pase cu cei cu care e pe diagonale şi cu care nu a făcut încă schimb de mingi. Atunci când nu mai are de pasat pe diagonală, fiecare jucător îi pasează vecinului din dreapta. Când mingea ajunge la posesorul iniţial, se pasează roată spre stânga până ce mingea se întoarce la posesorul iniţial.

OBJ.191. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic în care D este piciorul bisectoarei unghiului $\sphericalangle BAC$. Cercul circumscris triunghiului ABD reintersectează latura $[AC]$ în punctul E, iar cercul circumscris triunghiului ACD reintersectează latura $[AB]$ în punctul F. Notăm cu J punctul de intersecţie a dreptei AC cu tangenta în D la cercul circumscris triunghiului ACD şi cu K punctul de intersecţie a dreptei AB cu tangenta în D la cercul circumscris triunghiului ABD. Arătaţi că $JK \parallel EF$.

Mihai Miculiţa

Soluţie: Din patrulaterul inscriptibil $ABDE$ rezultă că $\sphericalangle BDK \equiv \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle EBD$, deci $KD \parallel BE$. Rezultă că $\sphericalangle DKA \equiv \sphericalangle EBA \equiv \sphericalangle EDA$, deci triunghiurile DKA şi EDA sunt asemenea (UU). Rezultă că $AE \cdot AK = AD^2$. Analog se arată că $AF \cdot AJ = AD^2$, deci $AE \cdot AK = AF \cdot AJ$, ceea ce arată că $JK \parallel EF$.



OBJ.192. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$. Arătaţi că

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{3abc}{a^3 + b^3 + c^3} \geq 4.$$

Marius Stănean, Marin Chirciu şi Octavian Stroe

Soluţia 1: (*Corneliu Mănescu-Avram, Ploieşti şi Nicuşor Zlota, Focşani*)

Vom demonstra mai întâi că $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \geq 3 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$. (*)

Din inegalitatea lui Hölder, avem succesiv

$$\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}\right) \geq \left(\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}} + \sqrt[3]{\frac{b^4}{c^2a^2}} + \sqrt[3]{\frac{c^4}{a^2b^2}}\right)^3 =$$

$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{(abc)^2}}\right)^3$, adică $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{(abc)^2}}$.

Din inegalitatea mediilor obţinem $\frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt[3]{(abc)^2}} \overset{AM-GM}{\geq} 3 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$.

Prin urmare este suficient să arătăm că $3 \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a^3+b^3+c^3} \geq 4$. (**)

Notăm $a+b+c = p,\ ab+bc+ca = q,\ abc = r$.

După efectuarea calculelor, inegalitatea (**), se scrie

$p(3p^4 - 19p^2q + 30q^2) + 9r(p^2 - 3q) \geq 0 \Leftrightarrow p(p^2 - 3q)(3p^2 - 10q) + 9r(p^2 - 3q) \geq 0 \Leftrightarrow$

$(p^3 - 3q)(3p^3 - 10pq + 9r) \geq 0 \Leftrightarrow (p^2 - 3q)\left[(p^3 - 4pq + 9r) + 2p(p^2 - 3q)\right] \geq 0,$

care este adevărată deoarece $p^2 - 3q \geq 0$, iar $p^3 - 4pq + 9r \geq 0$, reprezintă inegalitatea lui Schur.

Remarcă: Inegalitatea (*) se poate demonstra şi adunând

$\frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2c^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$ cu analoagele ei.

Soluţia 2: (*Marius Stănean*)

Mai întâi demonstrez următoarea inegalitate

$$(a^2+b^2+c^2)^2(a+b+c)^2 \geqslant 27abc(a^3+b^3+c^3).$$

Inegalitatea fiind omogenă, putem considera $a+b+c=3$. Atunci $ab+bc+ca=3(1-t^2)$, $t\in[0,1]$ şi folosind faptul că $r=abc\leq(1-t)^2(1+2t)$, inegalitatea se scrie

$$(1+2t^2)^2\geqslant r(r+9t^2),$$

deci e suficient să arătăm că

$$(1+2t^2)^2\geqslant(1-t)^2(1+2t)((1-t)^2(1+2t)+9t^2)$$

sau

$$t^2(22t^2+1-4t^4-6t^3-4t)\geqslant 0,$$

adevărată deoarece $4t^2+1\geqslant 4t$, $4t^2\geqslant 4t^4$ şi $6t^2\geqslant 6t^3$.
Mai departe folosind cunoscuta inegalitate

$$9(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8(x+y+z)(xy+yz+zx),$$

$$\begin{aligned}9(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\geqslant&8(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\ \geqslant&8abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\ \geqslant&8abc\sqrt{27abc(a^3+b^3+c^3)}\end{aligned}$$

sau

$$3(a^2+b^2)^2(b^2+c^2)^2(c^2+a^2)^2\geqslant 64a^3b^3c^3(a^3+b^3+c^3).$$

Folosind aceasta şi inegalitatea mediilor demonstrez inegalitatea propusă:

$$LHS+3\geqslant\frac{a^2+b^2}{b^2}+\frac{b^2+c^2}{c^2}+\frac{c^2+a^2}{a^2}+\frac{64a^4b^4c^4}{(a^2+b^2)^2(b^2+c^2)^2(c^2+a^2)^2}=$$
$$=\frac{a^2+b^2}{2b^2}+\frac{a^2+b^2}{2b^2}+\frac{b^2+c^2}{2c^2}+\frac{b^2+c^2}{2c^2}+\frac{c^2+a^2}{2a^2}+\frac{c^2+a^2}{2a^2}+$$
$$+\frac{64a^4b^4c^4}{(a^2+b^2)^2(b^2+c^2)^2(c^2+a^2)^2}\geqslant 7\sqrt[7]{1}=7.$$

Comentariu: Această generalizare a problemei **27748** din Gazeta Matematică nr. 10/2019 (autor *Titu Zvonaru*) ne-a fost trimisă în mod independent de *Marius Stănean*, pe de-o parte, şi de *Marin Chirciu şi Octavian Stroe* pe de altă parte. Soluţia dată de domnii *Chirciu şi Stroe* seamănă cu Soluţia 1. Domnii *Mănescu-Avram şi Zlota* ne-au trimis şi o a doua soluţie, mai lungă, bazată pe metoda SOS-Schur. Pentru o altă rezolvare precum şi interesante comentarii, consultaţi şi nota domnului *Zvonaru* de la pagina 9.

OBJ.193. Fie $x,y,z\in(0,\infty)$. Arătaţi că

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{x^2+y^2+z^2}.$$

Marian Cucoaneş, Rahim Shahbazov şi Sladjan Stankovik

Soluţie: Vom folosi următoarele egalităţi ce se pot demonstra prin calcul direct:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-x-y-z=\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x} \qquad (1)$$

$$3(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=(x+y)(x-y)^2+(y+z)(y-z)^2+(z+x)(z-x)^2 \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{z^2}{y}-x=\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{y}+x+2(z-y), \qquad (3)$$

$$\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{z}-y=\frac{(x-z)^2}{z}+\frac{(y-z)^2}{z}+y+2(x-z), \qquad (4)$$

$$\frac{y^2}{x}+\frac{z^2}{x}-z=\frac{(x-y)^2}{x}+\frac{(x-z)^2}{x}+z+2(y-x). \qquad (5)$$

Atunci $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{x^2+y^2+z^2} \iff$

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}-x-y-z\geq\frac{3(x^3+y^3+z^3)}{x^2+y^2+z^2}-x-y-z \overset{(1),(2)}{\iff}$$

$$\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{z}+\frac{(z-x)^2}{x}\geq\frac{(x+y)(x-y)^2+(y+z)(y-z)^2+(z+x)(z-x)^2}{x^2+y^2+z^2} \iff$$

$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{y}-x-y\right)(x-y)^2+\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{z}-y-z\right)(y-z)^2+$$
$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x}-z-x\right)(z-x)^2\geq 0 \overset{(3),(4),(5)}{\iff}(x-y)^2\cdot\left[\frac{(x-y)^2}{y}+\frac{(y-z)^2}{y}+x+2(z-y)\right]+(y-z)^2\cdot$$
$$\left[\frac{(x-z)^2}{z}+\frac{(y-z)^2}{z}+y+2(x-z)\right]+$$
$$(z-x)^2\cdot\left[\frac{(x-y)^2}{x}+\frac{(x-z)^2}{x}+z+2(y-x)\right]\geq 0 \iff$$

$$\frac{(x-y)^4}{y}+2(z-y)(x-y)^2+y\cdot(z-y)^2+\frac{(y-z)^4}{z}+2\cdot(x-z)(y-z)^2+z\cdot(x-z)^2+\frac{(z-x)^4}{x}+2\cdot$$
$$(y-x)(z-x)^2+x\cdot(y-x)^2+\frac{(x-y)^2\cdot(y-z)^2}{y}+\frac{(y-z)^2\cdot(x-z)^2}{z}+\frac{(x-z)^2\cdot(x-y)^2}{x}\geq 0 \iff$$

$$\left[\frac{(x-y)^2}{\sqrt{y}}+(z-y)\sqrt{y}\right]^2+\left[\frac{(z-x)^2}{\sqrt{x}}+(y-x)\sqrt{x}\right]^2+\left[\frac{(y-z)^2}{\sqrt{z}}+(x-z)\sqrt{z}\right]^2+\frac{(x-y)^2\cdot(y-z)^2}{y}+$$
$$\frac{(y-z)^2\cdot(x-z)^2}{z}+\frac{(x-z)^2\cdot(x-y)^2}{x}\geq 0;$$ această din urmă inegalitate este evidentă.

Remarci: Începând la fel, se pot da diferite demonstraţii folosind teorema SOS.

Problema nu este nouă. Ea a apărut (şi) în 2010 semnată de *Va Quoc Ba Can* (problema 1.57 din volumul 4 (Cyclic Inequalities) al seriei de culegeri de inegalităţi (Discrete Inequalities) publicată de catre *Vasile Cîrtoaje* sub sigla lui Art of Problem Solving în 2015). Sunt cunoscute şi variante mai tari ale ei (dar faptul că aceste variante chiar sunt mai tari nu este evident):

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{37(x^2+y^2+z^2)-19(xy+yz+zx)}{6(x^2+y^2+z^2)}$$ (*Michael Rozenberg*),

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geq\frac{6(x^2+y^2+z^2)-3(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2}$$ (*Nguyen Duy Tung, Va Quoc Ba Can*).

Aceste inegalităţi ne-au fost semnalate de *Dumitru Barac, Titu Zvonaru, Corneliu Mănescu-Avram* şi *Nicuşor Zlota*. Ultimii le folosesc spre a demonstra inegalitatea din problema **OBJ.193.**.

OBJ.194. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia $11^x - 15 \cdot 2^y = 1$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: (*Daniel Văcaru, Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota*)
Pentru $y \in \{0,1,2\}$ nu avem soluţii. Dacă $y = 3$, atunci $x = 2$. Dacă (x,y) ar fi o soluţie cu $y > 3$, din $(-1)^x \equiv 1 \pmod 3$ rezultă x par. Fie $x = 2z$, $z \in \mathbb{N}$. Atunci $15 \cdot 2^y = 11^x - 1 = 11^{2z} - 1 = 120(121^{z-1} + 121^{z-2} + \ldots + 121 + 1)$. Cum $16 \mid 2^y$, numărul din parantreză este par, deci z este par. Deducem că $x = 4t$, $t \in \mathbb{N}$, dar atunci $11^x - 1$ este divizibil cu $11^2 + 1 = 2 \cdot 61$, în timp ce $15 \cdot 2^y$ nu e divizibil cu 61. În concluzie, singura soluţie este $x = 2$, $y = 3$.

OBJ.195. Arătaţi că dacă x este un număr natural pentru care $3x^2 + 3x + 1$ este pătrat perfect, atunci $\sqrt{3x^2 + 3x + 1}$ se scrie ca suma pătratelor a două numere naturale consecutive.

Neculai Stanciu

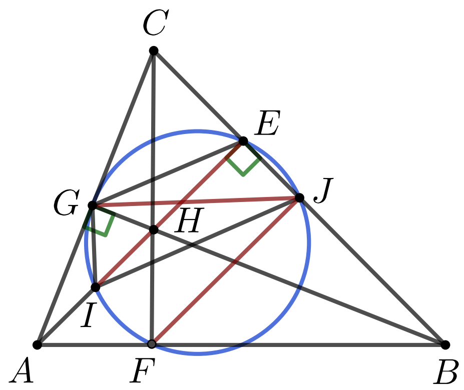
Soluţie: Dacă $3x^2 + 3x + 1 = y^2$, $y \in \mathbb{N}$, atunci $4y^2 = 3(4x^2 + 4x + 1) + 1$, adică $3(2x+1)^2 = (2y-1)(2y+1)$. Cum $(2y-1, 2y+1) = 1$, sunt posibile două situaţii: 1. $2y-1 = 3m^2$, $2y+1 = n^2$, $m, n \in \mathbb{N}$ şi 2. $2y - 1 = m^2$, $2y + 1 = 3n^2$. În primul caz rezultă $n^2 - 3m^2 = 2$, adică $n^2 \equiv 2 \pmod 3$, ceea ce nu se poate. R,amâne al doilea caz. Evident, m este impar, deci $m = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $2y - 1 = 4k^2 + 4k + 1$, deci $y = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$.

OBJ.196. Se consideră triunghiul ABC cu proprietatea că $IE = GJ$, unde E şi G sunt picioarele înălţimilor duse din A şi B ale triunghiului, iar I şi J sunt mijloacele segmentelor $[AH]$, respectiv $[BC]$. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle ABC$.

Petru Braica

Soluţia 1: Presupunem $E \in [CJ]$, celălalt caz fiind analog.
Atunci $m(\sphericalangle CJG) = 2m(\sphericalangle CBG) = 2m(\sphericalangle EAC) = m(\sphericalangle EIG)$, deci patrulaterul $GIJE$ este inscriptibil (în cercul lui Euler). Rezultă că $m(\sphericalangle IGJ) = 90°$, iar $GIJE$ este trapez isoscel. Cum $ABEG$ este inscriptibil, avem $m(\sphericalangle IJC) = m(\sphericalangle GEC) = m(\sphericalangle BAC)$, $m(\sphericalangle GJI) = m(\sphericalangle GEI) = 90° - m(\sphericalangle GEC) = 90° - m(\sphericalangle BAC)$, deci $m(\sphericalangle GJC) = m(\sphericalangle IJC) - m(\sphericalangle GJI) = 2m(\sphericalangle BAC) - 90°$. Dar $m(\sphericalangle GJE) = 2m(\sphericalangle CBG) = 2m(\sphericalangle CAE)$, deci $m(\sphericalangle CAE) = m(\sphericalangle BAC) - 45°$. Deducem că $m(\sphericalangle EAB) = 45°$, adică $m(\sphericalangle ABC) = 45°$.

Soluţia 2: Presupunem $E \in [CJ]$, celălalt caz fiind analog. Dacă notăm $\{F\} = CH \cap AB$, punctele J, E, G, I, F se află pe cercul lui Euler al triunghiului ABC. Avem $FJ = \dfrac{BC}{2} = GJ = IE$, deci $FJEI$ este dreptunghi (capetele a două coarde congruente sunt vârfurile unui trapez isoscel sau ale unui dreptunghi; cum $m(\sphericalangle IEJ) = 90°$, $FJEI$ este dreptunghi), ceea ce arată că triunghiul FJB este dreptunghic isoscel.



OBJ.197. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = ab + bc + ca$. Demonstraţi că

$$a^2b + b^2c + c^2a \geq 3.$$

Marian Cucoaneş

Soluţia 1: (*Maria Popa, Daniel Văcaru, Corneliu Mănescu-Avram şi Nicuşor Zlota*)
Este evident că $(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) \Rightarrow (a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c) \Rightarrow$
$a + b + c \geq 3$.

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (forma Titu Andreescu) avem
$a^2b+b^2c+c^2a=\dfrac{(ab)^2}{b}+\dfrac{(bc)^2}{c}+\dfrac{(ca)^2}{a}\geq\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{b+c+a}=a+b+c\geq 3.$
Egalitatea are loc pentru $a=b=c=1$.
Soluţia 2: (*Şerban Orza şi Dan Popescu*)
Avem $a+b+c=ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(a+b+c)$, de unde $a+b+c\geq 3$.
Atunci $a^2b+b^2c+c^2a=(a^2b-ab+b)+(b^2c-bc+c)+(c^2a-ca+a)=b(a^2-a+1)+c(b^2-b+1)+a(c^2-c+1)\geq ba+cb+ac=a+b+c\geq 3$.

OBJ.198. Fie n un număr natural nenul. Spunem despre o submulţime a lui $\{1,2,\ldots,n\}$ că este *rotundă*, dacă este nevidă şi media aritmetică a elementelor sale este un număr natural. Arătaţi că numărul submulţimilor rotunde ale lui $\{1,2,\ldots,n\}$ are aceeaşi paritate ca şi n.

Concursul Putnam, 2002

Soluţia 1: Fiecărei submulţimi nevide $S\subset\{1,2,\ldots,n\}$ îi asociem submulţimea $S'=\{n+1-s\mid s\in S\}$. Spunem despre o submulţime nevidă $S\subset\{1,2,\ldots,n\}$ că este simetrică dacă $S'=S$. Deoarece $(S')'=S$, putem grupa submulţimile care nu sunt simetrice în perechi disjuncte de forma $\{S,S'\}$. Să observăm că S este rotundă dacă şi numai dacă S' este rotundă (dacă media aritmetică a elementelor lui S este $m\in\mathbb{N}$, atunci media aritmetică a elementelor lui S' este $n+1-m\in\mathbb{N}$). Astfel, submulţimile rotunde care nu sunt simetrice vin în perechi, deci sunt în număr par. Să ne uităm acum la cele simetrice.
Dacă n este par, media unei mulţimi simetrice este $m=\dfrac{n+1}{2}\notin\mathbb{N}$, aşadar în acest caz avem un număr par de submulţimi rotunde.
Dacă n este impar, toate submulţimile simetrice au media $m=\dfrac{n+1}{2}\in\mathbb{N}$, deci sunt rotunde. Avem două tipuri de submulţimi simetrice: cele care nu-l conţin pe m şi cele care îl conţin. Putem din nou face perechi cu aceste submulţimi: submulţimea simetrică B care nu-l conţine pe m o împerechem cu $B\cup\{m\}$. Mulţimea $\{m\}$ rămâne însă fără pereche, deci, dacă n este impar, avem un număr impar de submulţimi rotunde.
Soluţia 2: Submulţimile rotunde ale lui $\{1,2,\ldots,n\}$ sunt de două tipuri: pentru unele, media aritmetică a elementelor sale este element al submulţimii, pentru celelalte media aritmetică nu aparţine submulţimii. Dacă unei submulţimi rotunde care nu-şi conţine media îi adăugăm şi media, obţinem o submulţime rotundă care îşi conţine media. Reciproc, dacă dintr-o submulţime rotundă care îşi conţine media eliminăm media, obţinem fie mulţimea vidă, fie o submulţime rotundă care nu-şi conţine media. Aşadar, în afară de cele n submulţimi rotunde care au exact un element, celelalte submulţimi pot fi grupate în perechi disjuncte de forma $\big\{B,B\cup\{m\}\big\}$ în care B este o submulţime rotundă care nu îşi conţine media, iar m este media. În concluzie, numărul submulţimilor rotunde are aceeaşi paritate cu numărul submulţimilor cu un element, n.

OBJ.199. Într-un patrulater $ABCD$, în care diagonalele AC şi BD nu sunt perpendiculare, notăm cu A' şi C' simetricele punctelor A, respectiv C, faţă de dreapta BD şi cu B' şi D' simetricele punctelor B, respectiv D, faţă de dreapta AC. Arătaţi că, în cazul în care patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, atunci şi patrulaterul $A'B'C'D'$ este inscriptibil.

Mihai Miculiţa

Soluţie: Fie $\{O\}=AC\cap BD$. Avem $\sphericalangle C'OD\equiv\sphericalangle COD\equiv\sphericalangle AOB\equiv\sphericalangle A'OB$, deci $O\in[A'C']$ şi, analog, $O\in[B'D']$. De asemenea, $OA'=OA$. $OB'=OB$, $OC'=OC$ şi $OD'=OD$.
Atunci, folosind puterea punctului O, avem:
$ABCD$ inscriptibil $\Leftrightarrow$ $AO\cdot OC=BO\cdot OD\Leftrightarrow A'O\cdot OC'=B'O\cdot OD'$ $\Leftrightarrow A'B'C'D'$ - inscriptibil.
Remarcă: Afirmaţia din enunţ este adevărată şi dacă $AC\perp BD$.

OBJ.200. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ satisfac $a + b + c = 3$, atunci

$$\frac{ab}{4bc+b+c}+\frac{bc}{4ca+c+a}+\frac{ca}{4ab+a+b}\geq\frac{abc}{2}.$$

Florin Rotaru

Soluţia 1: Aplicând inegalitatea mediilor, $3 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, de unde $abc \leq 1$. Din $9 = (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$ rezultă $ab + bc + ca \leq 3$.
Folosind inegalitatea mediilor şi inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz (forma Titu Andreescu) obţinem

$$\frac{ab}{4bc+b+c}+\frac{bc}{4ca+c+a}+\frac{ca}{4ab+a+b}\geq\frac{(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^2}{4(ab+bc+ca)+2(a+b+c)}\geq$$

$\dfrac{(3\sqrt[3]{abc})^2}{12+6}=\dfrac{\sqrt[3]{(abc)^2}}{2}\geq\dfrac{abc}{2}$. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 1$.

Remarcă: (*Titu Zvonaru*) Inegalitatea are loc în condiţia mai slabă $a + b + c \leq 3$.

Soluţia 2: (*Daniel Văcaru*)

Cu inegalitatea mediilor, $\dfrac{ab}{4bc+b+c}+\dfrac{bc}{4ca+c+a}+\dfrac{ca}{4ab+a+b}\geq$

$3\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^2c^2}{(4bc+b+c)\cdot(4ca+c+a)\cdot(4ab+a+b)}}$ (1).

Dar $\sqrt[3]{(4ab+a+b)\cdot(4b+b+c)\cdot(4ca+c+a)}\leq\dfrac{4(ab+bc+ca)+2(a+b+c)}{3}=$

$\dfrac{4(ab+bc+ca)+6}{3}$ (2).

Pe de altă parte, $ab+bc+ca\leq\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3$, deci avem, din (2),

$\sqrt[3]{(4ab+a+b)\cdot(4b+b+c)\cdot(4ca+c+a)}\leq\dfrac{4(ab+bc+ca)+6}{3}\leq 6$ (3).

Pe de altă parte, din $a + b + c = 3$ şi inegalitatea mediilor, deducem $1=\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}\Rightarrow$

$\sqrt[3]{a^2\cdot b^2\cdot c^2}\geq abc$ (4).

Acum, din (1), (3) şi (4), deducem că $\dfrac{ab}{4bc+b+c}+\dfrac{bc}{4ca+c+a}+\dfrac{ca}{4ab+a+b}\geq$

$$\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{\sqrt[3]{(4ab+a+b)\cdot(4b+b+c)\cdot(4ca+c+a)}}\overset{(3),(4)}{\geq}\frac{3abc}{6}=\frac{abc}{2},$$

aşa precum doream.

Soluţia 3: (*Marius-Valentin Drăgoi*)

Tripletele (a, b, c) şi $(4ab + a + b, 4ac + a + c, 4bc + b + c)$ sunt la fel ordonate, deci, conform inegalităţii rearanjamentelor, $\dfrac{ab}{4bc+b+c}+\dfrac{bc}{4ca+c+a}+\dfrac{ca}{4ab+a+b}\geq\dfrac{bc}{4bc+b+c}+\dfrac{ca}{4ca+c+a}+\dfrac{ab}{4ab+a+b}$, prin urmare, este suficient să demonstrăm că $\dfrac{bc}{4bc+b+c}+\dfrac{ca}{4ca+c+a}+\dfrac{ab}{4ab+a+b}\geq\dfrac{abc}{2}$, adică

$$\frac{1}{4abc+ab+ac}+\frac{1}{4abc+bc+ba}+\frac{1}{4abc+ca+cb}\geq\frac{1}{2}.$$

Ca în soluţia 1, $abc \leq 1$ şi $ab + bc + ca \leq 3$, deci, cu inegalitatea Cauchy-Buniakowsky-Schwarz (forma Titu Andreescu),

$$\frac{1}{4abc+ab+ac}+\frac{1}{4abc+bc+ba}+\frac{1}{4abc+ca+cb}\geq\frac{(1+1+1)^2}{12abc+2(ab+bc+ca)}\geq\frac{1}{2}.$$

OBJ.201. Arătaţi că dacă $a, b, c \in [1, 2]$, atunci $a^4 + b^4 + c^4 \leq 8abc + 2$.

Mihaela Berindeanu

Soluţia 1: Datorită simetriei, putem presupune că $a \geq b \geq c$.
Atunci $7a+1 \leqslant 8a \iff 4a+2a+a+1 \leqslant 8a \iff 2\cdot 2\cdot a+2\cdot a+a+1 \leqslant 8a \iff a^3+a^2+a+1 \leqslant 8a \Longrightarrow b^3 + b^2 + b + 1 \leqslant 8a \iff (b-1)(b^3 + b^2 + b + 1 - 8a) \leqslant 0$
$\iff 8a + b^4 \leqslant 8ab + 1$.
Analog, $8ab + c^4 \leqslant 8abc + 1$. Inegalitatea revine la $(c-1)(c^3 + c^2 + c + 1 - 8ab) \leq 0$ şi are loc deoarece $c^3 + c^2 + c + 1 \leq a^3 + a^2 + a + 1 \leq 4a + 2a + a + 1 = 7a + 1 \leq 7ab + ab = 8ab$. Avem şi $a^4 \leqslant 8a$. Am obţinut că $a^4 \leqslant 8a$, $8a + b^4 \leqslant 8ab + 1$ şi $8ab + c^4 \leqslant 8abc + 1$ care, adunate, conduc la inegalitatea cerută. Egalitatea are loc atunci când două dintre variabile sunt egale cu 1, iar cea de-a treia este 2.

Soluţia 2: Avem $a^4 \leq 5a^2 - 4 \iff (a^2 - 1)(a^2 - 4) \leq 0$ şi analoagele, deci este suficient să demonstrăm că $5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 8abc + 14$.
Notând $E(a, b, c) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$ şi presupunând $2 \geq a \geq b \geq c \geq 1$, avem $E(a, b, c) \leq E(2, b, 1) = 2b^2 - 10b + 14 \leq 2$ (cu egalitate dacă $b = 1$ sau $b = 2$). Aşadar, $a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca + 1$, deci este suficient să demonstrăm că $5(ab + bc + ca) \leq 8abc + 9$. Privită că funcţie în oricare din variabile (celelalte două fiind fixate), se vede că expresia $8abc + 9 - 5(ab + bc + ca)$ îşi atinge minimul atunci când $a, b, c \in \{1, 2\}$. Valoarea minimă este 0, atinsă când două dintre variabile sunt 1, iar cea de-a treia este 2.

RMT 1/2021

OBJ.202. Fie p şi q două numere prime diferite. Arătaţi că există o infinitate de numere naturale care au de 2020 de ori mai mulţi divizori divizibili cu $p \cdot q$ decât divizori nedivizibili cu $p \cdot q$.

Gheorghe Stoica

Soluţie: Căutăm numere de forma $p^a \cdot q^b \cdot m$, cu $a, b, m \in \mathbb{N}$, $(m, pq) = 1$, care au proprietatea cerută. Să notăm cu x numărul divizorilor lui m. Dintre cei $x(a+1)(b+1)$ divizori ai lui $p^a \cdot q^b \cdot m$, $x(a + b + 1)$ nu sunt divizibili şi cu p şi cu q (avem $x(a + 1)$ divizori de forma $p^k \cdot d$, unde $d \mid m$, nedivizibili cu q, $x(b + 1)$ divizori de forma $q^j \cdot d$, nedivizibili cu p, iar cei x divizori ai lui m au fost număraţi de două ori). Ceilalţi xab divizori sunt divizibili cu pq. Condiţia din enunţ revine la $ab = 2020(a + b + 1)$, deci la $(a - 2020)(b - 2020) = 2020^2 - 2020$. Putem, de exemplu, alege $a = 2021$, $b = 2020^2$ şi cum există o infinitate de alegeri pentru m, problema este rezolvată.

OBJ.203. Determinaţi numerele naturale x, y, z care verifică relaţia

$$\frac{x + y + z}{3} = \sqrt{\frac{x^2y + y^2z + z^2x}{x + y + z}}.$$

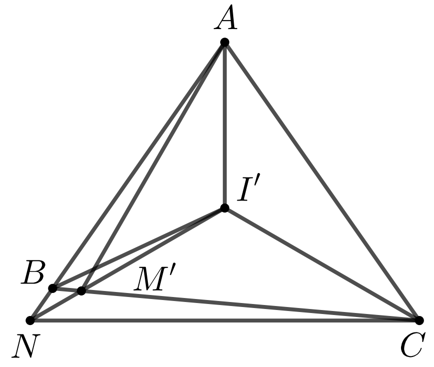
Neculai Stanciu

Soluţie: Datorită simetriei circulare, putem presupune $x \leq y$ şi $x \leq z$. Notând $a = y - x$, $b = z - x$, avem $a, b \in \mathbb{N}$. Înlocuind $y = x + a$, $z = x + b$ şi ridicând la pătrat, după efectuarea calculelor se ajunge la ecuaţia $(a+b)^3 = 9a^2b$, adică $a^3 - 6a^2b + 3ab^2 + b^3 = 0$. Dacă $a = 0$, atunci $b = 0$ şi invers. Dacă $a, b \neq 0$, relaţia precedentă arată că este necesar şi ca a să dividă b^3, şi ca b să dividă a^3, deci a şi b au aceiaşi divizori primi. Dacă în descompunerile în factori primi ai lui a şi b ar figura un număr prim care apare la un exponent diferit, de exemplu $\nu_p(a) = u < v = \nu_p(b)$, atunci $\nu_p(a^3) = 3u$, în timp ce $\nu_p(6a^2b - 3ab^2 - b^3) \geq 2u + v > 3u$, deci egalitatea nu poate avea loc decât dacă $a = b$. Se vede că ea nu are loc nici în acest caz, deci singura soluţie este $a = b = 0$, adică $x = y = z = n \in \mathbb{N}^*$.

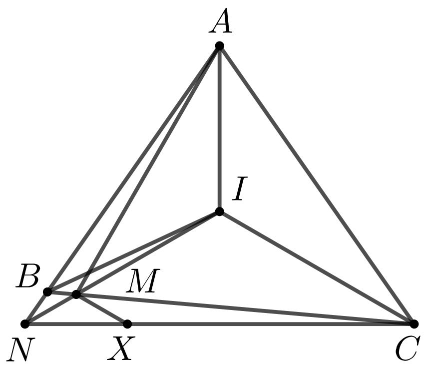
OBJ.204. Fie triunghiul isoscel ANC, cu $AN = AC$ şi $m(\sphericalangle NAC) = 70°$. Se consideră punctele $B \in (AN)$, $M \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAM) = m(\sphericalangle BCN) = 5°$. Dacă I este intersecţia dreptei MN cu bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, arătaţi că $(BI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$.

Ion Neaţă

Soluţia 1: Fie I' centrul cercului înscris în triunghiul ABC şi $\{M'\} = NI' \cap BC$. Arătăm că $M' = M$; va rezulta că $I' = I$, deci că $(BI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$. Avem $m(\sphericalangle ANC) = m(\sphericalangle ACN) = 55°$, $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, deci $m(\sphericalangle ABI') = m(\sphericalangle NCI') = 30°$. Rezultă că patrulaterul $BNCI'$ este inscriptibil, deci $m(\sphericalangle I'NC) = m(\sphericalangle I'BC) = 30°$, deci $m(\sphericalangle I'M'C) = 35° = m(\sphericalangle I'AC)$. Atunci triunghiurile $M'I'C$ şi $AI'C$ sunt congruente (ULU), deci triunghiul CAM' este isoscel, de unde $m(\sphericalangle M'AC) = 65°$ şi $m(\sphericalangle NAM') = 5°$, ceea ce arată că $M' = M$.



Soluţia 2: Avem $m(\sphericalangle ANC) = m(\sphericalangle ACN) = 55°$, deci $m(\sphericalangle ACM) = 50°$ şi $m(\sphericalangle MAC) = 65°$. Deducem că $m(\sphericalangle AMC) = 65° = m(\sphericalangle MAC)$, deci $CM = AC = AN$. Fie $X \in (CN$ astfel ca $CX = AM$. Atunci $\Delta CXM \equiv \Delta AMN$ (LUL), deci $MX = MN$ şi $\sphericalangle CXM \equiv \sphericalangle AMN$. Avem $m(\sphericalangle MNC) = m(\sphericalangle MXN) = 180° - m(\sphericalangle MXC) = 180° - m(\sphericalangle AMN) = m(\sphericalangle MAN) + m(\sphericalangle ANM)$, deci $m(\sphericalangle MNA) = 25°$ şi $m(\sphericalangle MNC) = 30° = m(\sphericalangle ICN)$.



Deducem că I se află, ca şi A, pe mediatoarea lui $[NC]$, deci $(AI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$. Aşadar, I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar $(BI$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$.

OBJ.205. Dacă $a, b, c, d > 0$, demonstraţi că

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) \geq 4(abc + bcd + cda + dab)^2.$$

Florin Rotaru

Soluţia 1: (*Corneliu Mănescu-Avram, Nicuşor Zlota şi autorul*)
Se verifică prin calcul identitatea
$(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) - (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab) = (ac-bd)^2$, de unde se obţine inegalitatea $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \geq (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$, cu egalitate dacă $ac = bd$. Analog se obţin inegalităţile $(a+c)(c+b)(b+d)(d+a) \geq (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$ şi $(a+c)(c+d)(d+b)(b+a) \geq (a+b+c+d)(abc+bcd+cda+dab)$. Înmulţind cele trei ineglităţi obţinem $[(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d)]^2 \geq (a+b+c+d)^3(abc+bcd+cda+dab)^3$, deci este suficient să demonstrăm că $(a+b+c+d)^3 \geq 16(abc+bcd+cda+dab)$, care este inegalitatea lui MacLaurin.
Egalitatea are loc atunci când $a = b = c = d$.
Soluţia 2: Desfăcând parantezele, cu notaţiile consacrate pentru sume Muirhead, se ajunge la $[3,2,1,0] + \frac{1}{3}[3,1,1,1] + [2,2,1,1] + \frac{1}{3}[2,2,2,0] \geq \frac{2}{3}[2,2,2,0] + 2[2,2,1,1]$, deci la $[3,2,1,0] + \frac{1}{3}[3,1,1,1] \geq \frac{1}{3}[2,2,2,0] + [2,2,1,1]$.
Din inegalitatea lui Muirhead, $\frac{1}{3}[3,2,1,0] \geq \frac{1}{3}[2,2,2,0]$, $\frac{2}{3}[3,2,1,0] \geq \frac{2}{3}[2,2,1,1]$ şi $\frac{1}{3}[3,1,1,1] \geq$

$\frac{1}{3}\,[2,2,1,1]$ care, prin adunare, dau inegalitatea dorită.

OBJ.206. Fie a,b,c,d numere reale pozitive cu $a+b+c+d=4$. Arătaţi că

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geq\frac{4}{81}\,(23+a^3+b^3+c^3+d^3).$$

Marius Stănean

Soluţie: Pentru început să observăm că egalitatea se obţine pentru $a=b=c=d=1$. Inegalitatea este echivalentă cu

$$\frac{a}{4-a}+\frac{b}{4-b}+\frac{c}{4-c}+\frac{d}{4-d}\geqslant\frac{4}{81}\left(23+a^3+b^3+c^3+d^3\right),$$

sau

$$\frac{a}{4-a}-\frac{4a^3}{81}+\frac{b}{4-b}-\frac{4b^3}{81}+\frac{c}{4-c}-\frac{4c^3}{81}+\frac{d}{4-d}-\frac{4d^3}{81}\geqslant\frac{92}{81}. \tag{1}$$

Încercăm să găsim numerele reale p,q astfel încât să avem

$$\frac{a}{4-a}-\frac{4a^3}{81}\geqslant pa+q, \tag{2}$$

pentru orice $a\in(0,4)$. Însumând atunci după a,b,c,d vom obţine

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{4-a}-\frac{4a^3}{81}\right)\geqslant 4p+4q. \tag{3}$$

Astfel, pentru a avea egalitate în (1), trebuie să punem condiţia $4p+4q=\dfrac{92}{81}\Longleftrightarrow p+q=\dfrac{23}{81}$. Mai departe, inegalitatea (2) poate fi scrisă în următoarele moduri

$$\frac{a}{4-a}-\frac{4a^3}{81}\geqslant p(a-1)+\frac{23}{81},$$

$$\frac{81a}{4-a}-4a^3-23\geqslant 81p(a-1),$$

$$\frac{81a}{4-a}-27-4(a^3-1)\geqslant 81p(a-1),$$

$$\frac{108(a-1)}{4-a}-4(a-1)(a^2+a+1)\geqslant 81p(a-1),$$

$$(a-1)\left(\frac{108}{4-a}-4a^2-4a-4-81p\right)\geqslant 0.$$

Evident al doilea factor trebuie să fie 0 pentru $a=1$, de unde rezultă $p=\dfrac{8}{27}$, apoi $q=-\dfrac{1}{81}$, şi atunci inegalitatea devine

$$\frac{4(a-1)^4}{4-a}\geqslant 0,$$

care este evident adevărată. Prin urmare, inegalitatea (3) se scrie astfel

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{4-a}-\frac{4a^3}{81}\right)\geqslant\frac{32}{27}-\frac{4}{81}=\frac{92}{81}.$$

Observaţie. Inegalitatea propusă este mai tare decât următoarea:

$$a,b,c,d>0\Longrightarrow\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{c+d+a}+\frac{c}{d+a+b}+\frac{d}{a+b+c}\geqslant\frac{4}{3}.$$

OBJ.207. Care este numărul minim de culori cu care se pot colora numerele întregi (fiecare număr întreg se colorează cu o singură culoare) astfel încât diferenţa a nicicare două numere întregi de aceeaşi culoare să nu fie număr prim?

dr. RMT

Soluţie: Numărul minim de culori este 4.
Într-adevăr, trei (sau mai puţine) culori nu ajung pentru că numerele 0, 2, 5, 7 trebuie să aibă culori diferite (oricare două dintre ele au diferenţa număr prim).
Pe de altă parte, patru culori ajung: colorăm numerele în funcţie de restul împărţirii la 4. Atunci două numere au aceeaşi culoare dacă şi numai dacă diferenţa lor este divizibilă cu 4, deci nu este număr prim.

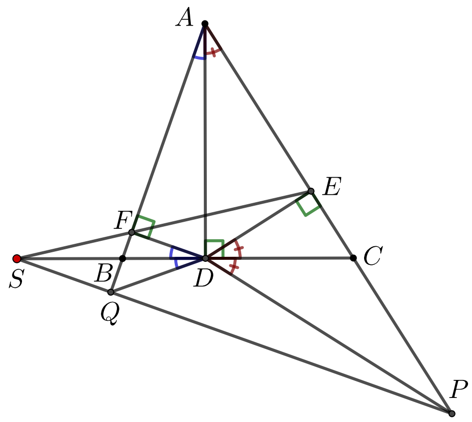
OBJ.208. Fie a şi b două numere naturale cu $b > a + 1$ şi $b \mid a^2 + 2$. Arătaţi că $b \geq a + \sqrt{a}$.

Mihaela Berindeanu

Soluţie: Notăm $b - a = c$. Atunci $c \geq 2$, iar $a + c \mid a^2 + 2$ şi $a + c \mid a^2 - c^2$ implică $a + c \mid c^2 + 2$. Atunci $c^2+2 \geq a+c$ şi $c \geq 2$ implică $c^2 \geq a+c-2 \geq a$, adică $c \geq \sqrt{a}$. Rezultă că $b = a+c \geq a+\sqrt{a}$.

OBJ.209. Fie D piciorul înălţimii duse din vârful A al unui triunghi ascuţitunghic ABC în care $AB \neq AC$, iar E şi F proiecţiile punctului D pe laturile (AC), respectiv (AB). Notăm cu P punctul de intersecţie al dreptei AC cu tangenta în D la cercul circumscris triunghiului DAC şi cu Q punctul de intersecţie al dreptei AB cu tangenta în D la cercul circumscris triunghiului DAB. Arătaţi că dreptele BC, EF şi PQ sunt concurente.

Mihai Miculiţa



Soluţie: Tratăm numai cazul în care $m(\sphericalangle B), m(\sphericalangle C) > 45°$, celelalte cazuri fiind asemănătoare. Din faptul că DP este tangentă la cercul circumscris triunghiului CAD deducem că $\sphericalangle PDC \equiv \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle EDC$, deci $(DC$ este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle EDP$. Cum $DA \perp DC$, $(DA$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\sphericalangle EDP$. Din teorema bisectoarei interioare, respectiv exterioare avem $\dfrac{CP}{CE} = \dfrac{DP}{DE} = \dfrac{AP}{AE}$, de unde obţinem că $\dfrac{AE}{CE} = \dfrac{AP}{CP}$. Analog se arată că $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{AQ}{BQ}$. Cum $AB \neq AC$, există $\{S\} = EF \cap BC$. Din teorema lui Menelaus aplicată în triunghiul ABC şi transversalei $S - E - F$ obţinem că $\dfrac{AF}{BF} \cdot \dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CE}{AE} = 1$, deci, ţinând seama de relaţiile deduse anterior, $\dfrac{AQ}{BQ} \cdot \dfrac{BD}{CD} \cdot \dfrac{CP}{AP} = 1$, relaţie care, în virtutea reciprocei teoremei lui Menelaus, arată că punctele Q, P, S sunt coliniare, ceea ce trebuia demonstrat.

Remarcă: Dacă $m(\sphericalangle C) = 45°$, atunci tangenta în D la cercul circumscris triunghiului ACD este paralelă cu AC, astfel că punctul P nu există. Dacă $m(\sphericalangle C) < 45°$, atunci $P \in (EA$, iar relaţiile din enunţ rămân adevărate, însă $(DA$ este acum bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle EDP$, în timp ce $(DC$ este bisectoarea exterioară.
Afirmaţia din enunţ rămâne adevărată şi dacă triunghiul nu este ascuţitunghic.

OBJ.210. Arătaţi că dacă numerele naturale nenule a şi b au proprietatea că a^3+ab^2+1 divide b^3+ba^2+1, atunci ele sunt egale.

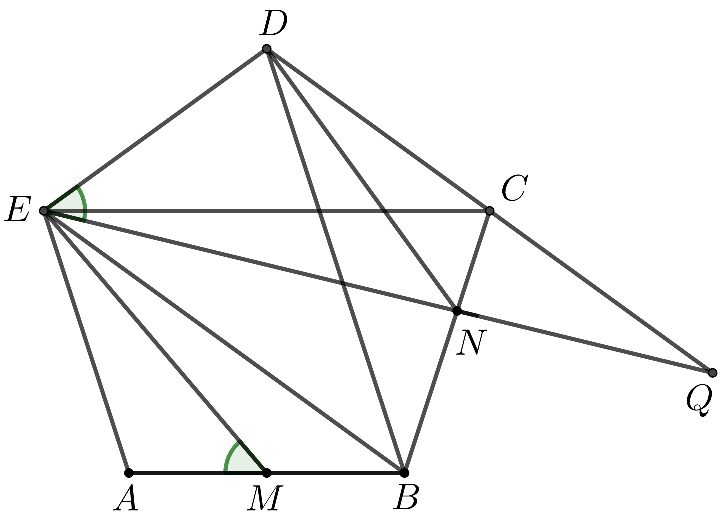
Mihaela Berindeanu

Soluţie:
Dacă $a^3+ab^2+1 \mid b^3+ba^2+1$, atunci $a^3+ab^2+1 \leq b^3+ba^2+1$, deci $a^3+ab^2-b^3-ba^2 \leq 0$, adică $(a-b)(a^2+b^2) \leq 0$. Deducem că $a \leq b$.
Pe de altă parte, are loc următoarea identitate:
$b(a^3+ab^2+1)-a(b^3+ba^2+1) = b-a$, deci condiţia din ipoteză implică $a^3+ab^2+1 \mid b-a$. De aici rezultă că fie $a^3+ab^2+1 \leq b-a$, fie $b-a=0$. Deoarece $b-a < b \leq ab^2 < a^3+ab^2+1$, prima variantă nu poate avea loc, deci treby=uie ca $a=b$.

OBJ.211. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat, M mijlocul lui $[AB]$ şi $N \in [BC]$ astfel încât $\sphericalangle DEN \equiv \sphericalangle AME$. Demonstraţi că $(DN$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$.

Clara Iurea

Soluţie: Fie $\{Q\} = EN \cap CD$. Triunghiurile EAM şi QDE sunt asemenea (UU), deci $\dfrac{DQ}{AE} = \dfrac{DE}{AM} = 2$. Deducem că $QD = DE$. Din $EB \parallel CD$ rezultă $\Delta\, QCN \sim \Delta\, EBN$, de unde $\dfrac{CN}{DN} = \dfrac{QC}{BE} = \dfrac{CD}{BD}$. Din reciproca teoremei bisectoarei rezultă că $(DN$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BDC$.



Configuraţia are şi alte proprietăţi interesante: $\sphericalangle EMN = \sphericalangle EDN = 90°$; dacă $\{R\} = EN \cap AC$, atunci $EAMR$ este inscriptibil.

OBJ.212. Fie $a, b, m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(m, n) = 1$ şi m, n sunt cele mai mici numere astfel încât $a \mid \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{m \text{ ori}}$ şi $b \mid \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n \text{ ori}}$. Arătaţi că $(a, b) = 1$ şi că $m \cdot n$ este cel mai mic număr k cu proprietatea că $a \cdot b \mid \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k \text{ ori}}$.

Ovidiu Pop

Soluţie: Evident, a şi b sunt prime cu 10. Conform identităţii lui Bézout, $(m,n)=1$ implică existentă lui $x,y\in\mathbb{Z}$ astfel încât $mx+ny=1$. Evident, avem fie $x<0<y$, fie $y<0<x$. Vom trata numai primul caz, al doilea fiind absolut analog. Renotând $u=-x$, $v=y$, avem $u,v\in\mathbb{N}$ şi $vn-um=1$. Fie $d=(a,b)$. Atunci $d\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{m\text{ ori}}$ implică $d\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{um\text{ ori}}$ şi, analog, $d\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{vn\text{ ori}}$. Cum $vn-um=1$, numărul $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{vn\text{ ori}}$ are cu o cifră în plus faţă de $\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{um\text{ ori}}$. Cum d le divide pe amândouă, d divide şi diferenă care este 10^{um}. Dar $(a,10)=1$ implică $(d,10^{um})=1$, deci $d=1$.
În continuare arătăm că mn este cel mai mic număr k cu proprietatea $ab\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{m\text{ ori}}$.
Pe de-o parte avem că $a\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{mn\text{ ori}}$, $b\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{mn\text{ ori}}$ şi $(a,b)=1$, deci $ab\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{mn\text{ ori}}$, adică numărul $k=mn$ chiar are proprietatea $ab\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k\text{ ori}}$.
Mai rămâne să arătăm că este cel mai mic cu această proprietate. Pentru aceasta, demonstrăm că $a\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k\text{ ori}}$ dacă şi numai dacă $m\mid k$. O implicaţie este evidentă (suficienţa condiţiei $m\mid k$). Pentru necesitate, presupunând că $m\nmid k$, putem scrie teorema împărţirii cu rest: $k=cm+r$, unde $0<r<m$. Avem $a\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{cm\text{ ori}}$ şi $a\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k\text{ ori}}$, deci,prin scădere, $a\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{r\text{ ori}}\cdot10^{cm}$. Cum a şi 10^{cm} sunt prime între ele, va rezulta că $a\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{r\text{ ori}}$, cu $r<m$, ceea ce contrazice alegerea lui m ca fiind cel mai mic număr cu această proprietate.
Conchidem că orice număr k cu proprietatea $ab\mid\underbrace{\overline{11\ldots1}}_{k\text{ ori}}$ trebuie să fie divizibil şi cu m şi cu n, deci cu $[m,n]$. Dar $(m,n)=1$ implică $[m,n]=mn$, deci k minim este mn.

OBJ.213. Fie n un număr natural care nu este pătrat perfect. Notăm cu D mulţimea divizorilor naturali ai lui n. Demonstraţi că elementele mulţimii D pot fi grupate în perechi disjuncte astfel încât, în fiecare pereche, numărul mai mic divide numărul mai mare.

antrenament Italia, 2021

Soluţie: Dacă n nu este pătrat perfect, atunci el are divizori primi care în descompunerea în factori a lui n apar la o putere impară. Fie p un astfel de divizor prim şi $v_p(n)=2k+1$ exponentul lui p în descompunerea în factori a lui n. Atunci $n=p^{2k+1}\cdot m$, iar divizorii lui m sunt de forma $p^j\cdot d$, unde $0\le j\le 2k+1$ şi $d\mid m$. Grupăm divizorii în perechi de forma $(p^j\cdot d,p^{j+1}\cdot d)$, unde $j\in\{0,2,4,\ldots,2k\}$ şi $d\mid m$. În fiecare pereche numărul mai mic divide numărul mai mare.
Remarcă: Dacă n este pătrat perfect, el are un număr impar de divizori, deci o asemenea grupare nu mai este posibilă.

OBJ.214. Dacă a,b,c sunt numere reale pozitive astfel încât $abc=1$ arătaţi că

$$\sqrt{1+8a}+\sqrt{1+8b}+\sqrt{1+8c}\ge 9.$$

Marius Stănean

Soluţia 1: Avem următoarea inegalitate

$$\sqrt{1+8a}\ge\frac{2+7a}{2+a}\iff 8a(a-1)^2\ge 0.$$

Astfel mai rămâne să arătăm că

$$\frac{a}{2+a}+\frac{b}{2+b}+\frac{c}{2+c}\ge 1.$$

Cu substituţia $a = \dfrac{x^2}{yz}$, $b = \dfrac{y^2}{zx}$, $c = \dfrac{z^2}{xy}$ şi folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că

$$\sum_{cyc} \frac{a}{2+a} = \sum_{cyc} \frac{x^2}{x^2+2yz} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = 1.$$

Soluţia 2: cu inegalitatea dintre media pătratică şi cea aritmetică aplicată pentru numerele $1, a, a, \ldots, a$ (8 de a) avem $\sqrt{1+8a} \geq \dfrac{1+8\sqrt{a}}{3}$, apoi din inegalitatea dintre media arirmetică şi cea geometrică, $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 3\sqrt[6]{abc} = 1$.

Soluţia 3: (*Daniel Văcaru*)
Avem $1 + 8a \geq 9\sqrt[9]{a^8} \Rightarrow \sqrt{1+8a} \geq 3\sqrt[9]{a^4}$. Atunci avem

$$\sqrt{1+8a} + \sqrt{1+8b} + \sqrt{1+8c} \geq 3(\sqrt[9]{a^4} + \sqrt[9]{b^4} + \sqrt[9]{c^4}) \geq 9\sqrt[27]{(abc)^4} = 9.$$

OBJ.215. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $ab + bc + ca = 3$. Arătaţi că

$$\frac{a^2+b^2}{a+b+2} + \frac{b^2+c^2}{b+c+2} + \frac{c^2+a^2}{c+a+2} \geq \frac{7}{4}(a+b+c) - \frac{15}{4}.$$

Marius Stănean

Inegalitatea se mai poate scrie succesiv astfel:

$$\sum_{cyc} \left(\frac{a^2+b^2}{a+b+2} - \frac{a+b}{2} \right) \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - \frac{15}{4},$$

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2 - 2(a+b)}{a+b+2} \geq \frac{3}{2}(a+b+c) - \frac{15}{2},$$

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b+2} - \sum_{cyc} \frac{2(a+b)}{a+b+2} \geq \frac{3}{2}(a+b+c) - \frac{15}{2}.$$

Din inegalitatea mediilor

$$2(a+b) \leq \frac{(a+b+2)^2}{4},$$

deci mai rămâne de arătat

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b+2} - \sum_{cyc} \frac{a+b+2}{4} \geq \frac{3}{2}(a+b+c) - \frac{15}{2},$$

care se mai poate scrie astfel

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b+2} \geq 2(a+b+c-3),$$

sau

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b+2} \geq \frac{2\left[(a+b+c)^2 - 9\right]}{a+b+c+3},$$

sau

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b+2} \geq \frac{2\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)\right]}{a+b+c+3},$$

sau

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a+b+2} \geq \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{a+b+c+3},$$

inegalitate care este evident adevărată.

OBJ.216. Aflaţi valoarea maximă a expresiei $(x, y) + (y, z) + (z, x)$, unde x, y, z sunt numere naturale nenule cu suma 300. Aceeaşi întrebare dacă $x + y + z = 100$.

Mircea Lascu

Soluţie: Pentru prima întrebare: putem presupune $x \leq y \leq z$. Atunci $(x, y) \leq x$, $(y, z) \leq y$ şi $(z, x) \leq x$, deci $(x, y) + (y, z) + (z, x) \leq 2x + y \leq x + y + z = 300$. Această valoare se atinge pentru $x = y = z = 100$. Aşadar maximul căutat este 300.
Pentru întrebarea a doua: alegând numerele $40, 40, 20$ obţinem 80. Arătăm că aceasta este valoarea maximă. Presupunem că există $x \leq y \leq z$ pentru care expresia ia o valoare mai mare. Atunci $80 < 2x + y = 100 - z + x$, deci $z - x < 20$. Cum $z \neq x$, rezulta $(z, x) < 20$. Atunci $(x, y) > 40$ sau $(y, z) > 40$. Primul caz ar duce la $x > 40$, imposibil. Al doilea caz implică $y = z$ şi atunci $E = y + 2(y, 100 - 2y) = y + 2(y, 100)$ şi de aici e uşor pe cazuri.

OBJ.217. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. În câte ordini pot fi scrise numerele $1, 2, \ldots, n$ astfel încât, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, primele k numere scrise să dea resturi diferite la împărţirea cu k?

Olimpiadă juniori, Canada, 2021

Soluţie: Arătăm prin inducţie că primele k elemente ale permutării trebuie să fie k numere consecutive din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Afirmaţia este evidentă în cazul $k = n$ şi vom folosi inducţia înapoi: vom arăta că, dacă primele k numere sunt consecutive şi primele $k - 1$ dau resturi diferite la împărţirea cu $k - 1$, atunci primele $k - 1$ numere sunt numere consecutive. Să observăm că numai primul şi ultimul din cele k numere consecutive, cel mai mare şi cel mai mic, pot da acelaşi rest la împărţirea cu $k - 1$, deci al k-lea număr trebuie să fe ori cel mai mic, ori cel mai mare din primele k. Aşadar, primele $k - 1$ numere trebuie să fie şi ele numere consecutive. Aceasta încheie inducţia. Aşadar, la fiecare pas, când trecem dde la k la $k-1$, avem două opţiuni: ori renunţăm la cel mai mare dintre numere, ori la cel mai mic dintre ele. În concluzie, numărul permutărilor cu proprietatea din enunţ este 2^{n-1}.