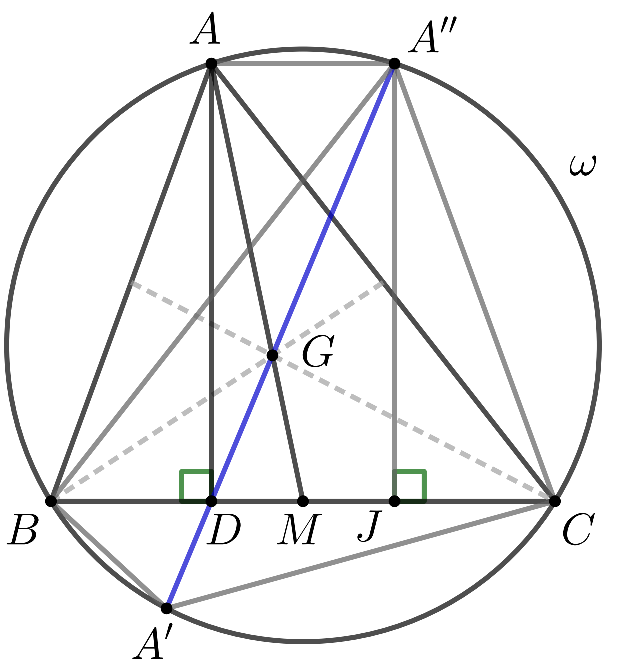
Problema săptămânii 301

Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate şi ω cercul său circumscris. Fie D, E, F picioarele înălţimilor din A, B, respectiv C. Semidreptele $(GD$, $(GE$ şi $(GF$ intersectează ω în punctele A_1, B_1 şi respectiv C_1.
Demonstraţi că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Nirjhar Nath (Romantics of Geometry)

Soluţie: (*David Ghibu*)
Vom folosi următoarea:
Lemă: Fie $A'' \in \omega$ astfel încât $AA'' \parallel BC$. Atunci A'', G şi D sunt coliniare.

Demonstraţia lemei: Fie $A''J \perp BC$, $J \in BC$ şi M mijlocul lui $[BC]$. Atunci $ABCA''$ este trapez isoscel, iar $ADJA''$ este dreptunghi. Triunghiurile dreptunghice ADB şi $A''JC$ sunt congruente (IC), deci $BD = JC$, adică M este mijlocul lui $[DJ]$. Atunci $\dfrac{AG}{GM} = 2 = \dfrac{AA''}{DM}$, deci triunghiurile AGA'' şi MGD sunt asemenea. Deducem că $\sphericalangle AGA'' \equiv \sphericalangle MGD$ şi, din reciproca unghiurilor opuse la vârf, punctele A'', G, D sunt coliniare.



Revenind la problemă, concluzia acesteia va rezulta din varianta trigonometrică a teoremei lui Ceva dacă demonstrăm că $\prod \dfrac{\sin(\sphericalangle BAA')}{\sin(\sphericalangle CAA')} = 1$. Din teorema sinusurilor avem că $\sin(\sphericalangle BAA') = \dfrac{BA'}{2R}$ şi $\sin(\sphericalangle CAA') = \dfrac{CA'}{2R}$, unde R este raza lui ω.

Aşadar, trebuie să arătăm că $\prod \frac{BA'}{CA'} = 1$.

Avem $\Delta\, BDA' \sim \Delta\, A''DC$ şi $\Delta\, CDA' \sim \Delta\, A''DB$ (UU), de unde obţinem că $\frac{BA'}{A''C} = \frac{BD}{A''D}$, respectiv $\frac{CA'}{A''B} = \frac{CD}{A''D}$. Din ultimele două relaţii, folosind că $A''B = AC$ şi $A''C = AB$ rezultă că $\frac{BA'}{CA'} = \frac{A''C}{A''B} \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BD}{CD}$.
Înălţimile triunghiului ABC fiind concurente, din teorema lui Ceva obţinem că

$$\prod \frac{BA'}{CA'} = \prod \frac{BD}{CD} = 1,$$

de unde concluzia.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Emanuel Mazăre, Andrei Pană, Victor Vasile Dragoş, Denis Nica* şi *Aida Mitroi.*

Problem of the week no. 301

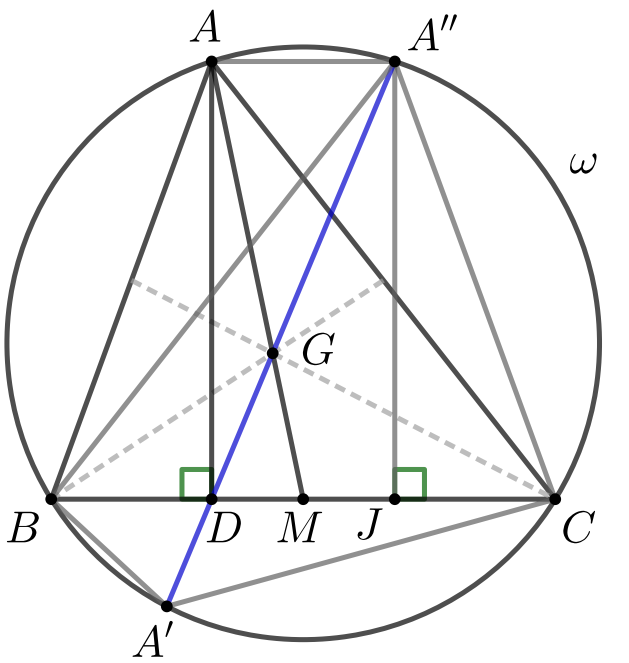
Let ABC be a triangle, G its centroid and ω its circumcircle. Let D, E, F be the feet of the altitudes from vertices A, B, C. Rays $(GD$, $(GE$ and $(GF$ intersect ω at A_1, B_1 and C_1, respectively. Prove that AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent.

Nirjhar Nath (Romantics of Geometry)

Solution: (*David Ghibu*)
We use the following:
Lemma: Consider $A'' \in \omega$ such that $AA'' \parallel BC$. Then A'', G and D are collinear.

Proof of the Lemma: Let J be the projection of A'' onto BC, and denote by M the midpoint of $[BC]$. Then $ABCA''$ is an isosceles trapezoid, and $ADJA''$ is a rectangle. Right triangles ADB and $A''JC$ are equal, therefore $BD = JC$, i.e. M is also the midpoint of $[DJ]$. It follows that $\frac{AG}{GM} = 2 = \frac{AA''}{DM}$, i.e. triangles AGA'' and MGD are similar. We deduce that $\sphericalangle AGA'' = \sphericalangle MGD$ which means that points A'', G, D are collinear.

Returning to the problem, its conclusion will follow from the trigonometric form of Ceva's Theorem if we prove that $\prod \frac{\sin(\sphericalangle BAA')}{\sin(\sphericalangle CAA')} = 1$.



From the Law of sines we have that $\sin(\sphericalangle BAA') = \dfrac{BA'}{2R}$ and $\sin(\sphericalangle CAA') = \dfrac{CA'}{2R}$, where R is the radius of ω.
Thus, we need to prove that $\prod \dfrac{BA'}{CA'} = 1$.

From $\Delta\, BDA' \sim \Delta\, A''DC$ and $\Delta\, CDA' \sim \Delta\, A''DB$ (AA) we get $\dfrac{BA'}{A''C} = \dfrac{BD}{A''D}$ and $\dfrac{CA'}{A''B} = \dfrac{CD}{A''D}$, respectively. From the last two relations we, using $A''B = AC$ and $A''C = AB$, we obtain that $\dfrac{BA'}{CA'} = \dfrac{A''C}{A''B} \cdot \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{BD}{CD}$.
The altitudes of the triangle ABC being concurrent, from Ceva's Theorem it follows that

$$\prod \frac{BA'}{CA'} = \prod \frac{BD}{CD} = 1,$$

hence the conclusion.