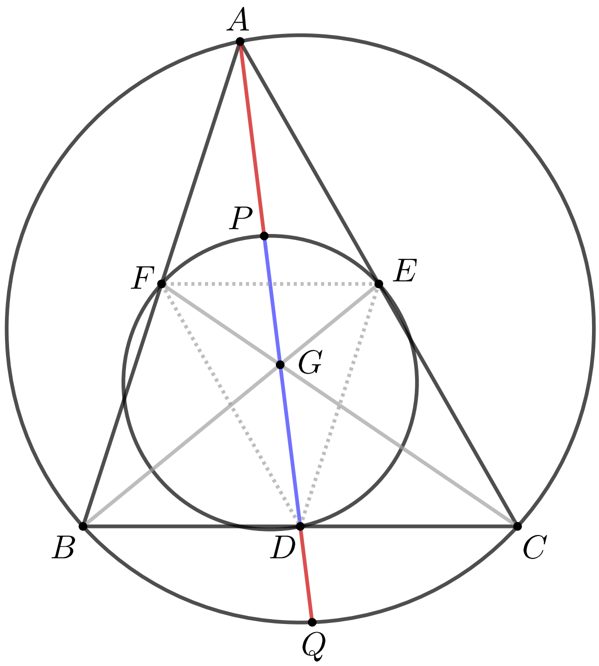
Problema săptămânii 297

Fie D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC. Dreapta AD intersectează din nou cercurile circumscrise triunghiurilor ABC şi DEF în punctele Q, respectiv P. Demonstraţi că $AP + DQ = PD$.

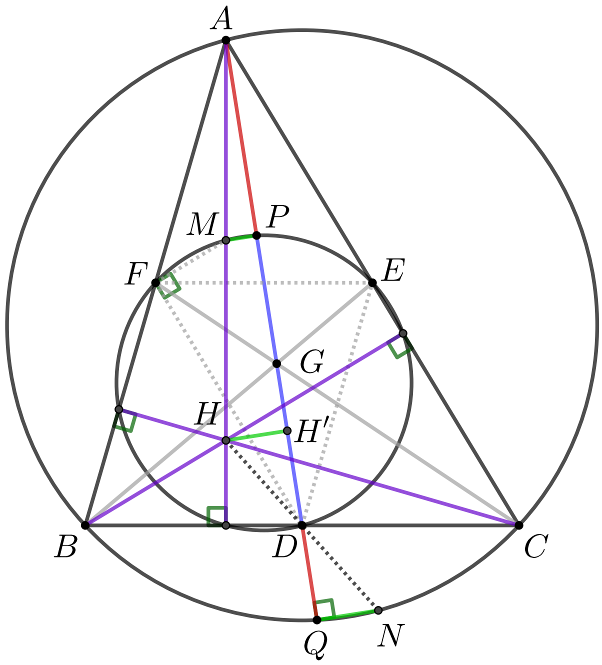
Stanley Rabinowitz

Problema a fost postată pe facebook, pe grupul Romantics of Geometry. Primele două soluţii sunt preluate de pe acelaşi grup.

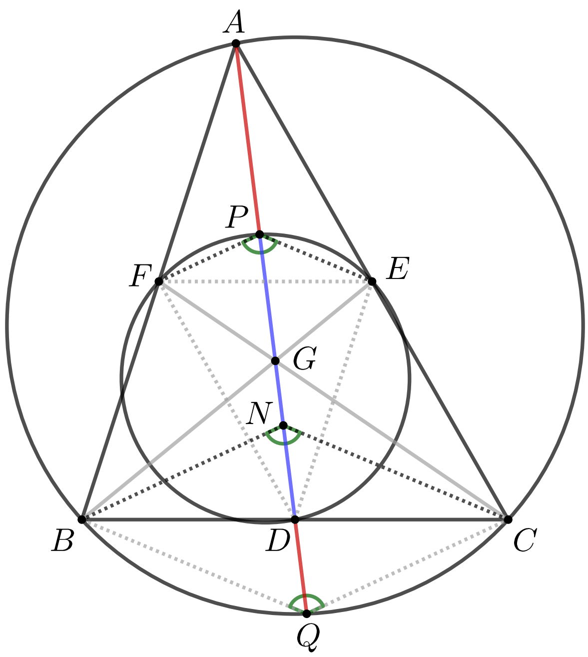
Soluţia 1: (*Rajarshi Chakraborty*)
Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Omotetia inversă de centru G şi raport 2 duce D în A, E în B, F în C, deci triunghiul DEF în triunghiul ABC. Ea duce cercul circumscris lui DEF în cercul circumscris lui ABC şi semidreapta $(GD$ în semidreapta $(GA$, deci duce P în Q şi $[DP]$ în $[AQ]$. Deducem că $AQ = 2DP$, de unde concluzia.



Soluţia 2: (*Radosław Żak*)
Fie H ortocentrul triunghiului ABC, H' proiecţia lui H pe AD, M mijlocul lui $[AH]$ şi N simetricul lui H faţă de D.
Se ştie că M se află pe cercul circumscris triunghiului DEF (*cercul celor 9 puncte*: M este unul din cele 9 puncte), mai mult, M este diametral opus lui D în acest cerc.
Atunci $MP \parallel HH'$ (ambele perpendiculare pe AD), deci $AP = PH'$ (1).
Se ştie că N se află pe cercul circumscris triunghiului ABC şi că este punctul diametral opus lui A în acest cerc. Atunci $AQ \perp QN$ şi $HH' \perp AQ$ implică $HH' \parallel QN$, iar $HD = DN$ implică $H'D = DQ$ (2).
Din (1) şi (2) rezultă concluzia.



Soluţia 3: (*Titu Zvonaru*)
Notăm cu N simetricul lui A față de P și cu Q' simetricul lui N față de D. Deoarece patrulaterele $AFDE$ și $BQ'CN$ sunt paralelograme, iar patrulaterul $DEPF$ este inscriptibil, avem $\sphericalangle BQ'C = \sphericalangle BNC = \sphericalangle FPE = 180° - \sphericalangle FDE = 180° - \sphericalangle BAC$. Deducem că punctul Q' este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC, ceea ce înseamnă că punctele Q și Q' coincid. Atunci $AP + DQ = PN + ND = PD$.



Variantă: (*Aida Mitroi*)
Fie N simetricul lui Q faţă de D. Atunci $BNCQ$ este paralelogram, deci $\sphericalangle BNQ \equiv$

$\sphericalangle AQC \equiv \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FED \equiv \sphericalangle FPD$, deci $FP \parallel BN$. Deducem că P este mijlocul lui $[AN]$, de unde concluzia.

Soluţia 4: (*Emanuel Mazăre*)
Fie $\{M\} = AD \cap EF$. Deoarece $AFDE$ şi $BDEF$ sunt paralelograme, iar $ABQC$ şi $PFDE$ sunt patrulatere inscriptibile, avem $\sphericalangle FPM \equiv \sphericalangle FED \equiv \sphericalangle FBD \equiv \sphericalangle DQC$ şi $\sphericalangle FMP \equiv \sphericalangle BDP \equiv \sphericalangle CDQ$, astfel că triunghiurile PMF şi QDC sunt asemenea. Atunci $\dfrac{PM}{QD} = \dfrac{FM}{CD} = \dfrac{1}{2}$, deci $QD = 2PM$. Atunci $AP + QD = AM - PM + 2PM = AM + PM = MD + PM = PD$.
(De fapt este o altă prezentare, elementară, a omotetiei din soluţia 1; omotetia respectivă duce triunghiul FMP în triunghiul CDQ.)

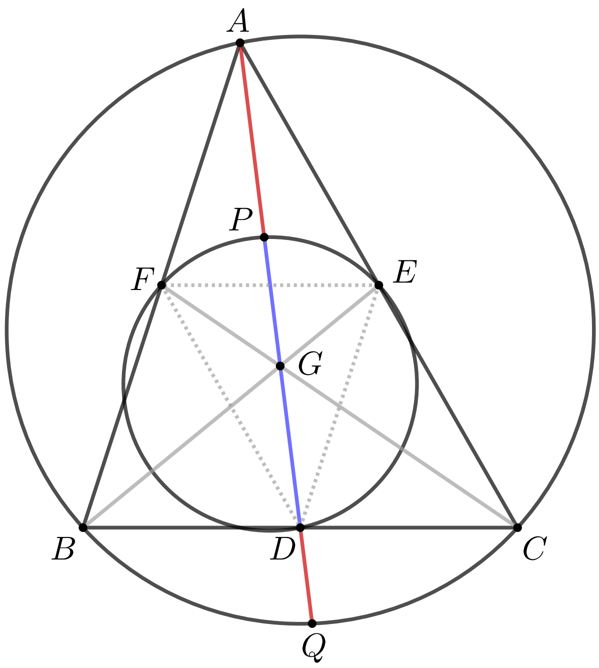
Am primit soluţii de la: *Radu Stoleriu, David Ghibu, Titu Zvonaru, Emanuel Mazăre, Dan Drăghici* şi *Aida Mitroi.*

Problem of the week no. 297

Let D, E, F be the midpoints of the sides BC, CA, and AB, respectively, of the triangle ABC. Line AD intersects again the circumcircles of triangles ABC and DEF at Q and P, respectively. Prove that $AP + DQ = PD$.

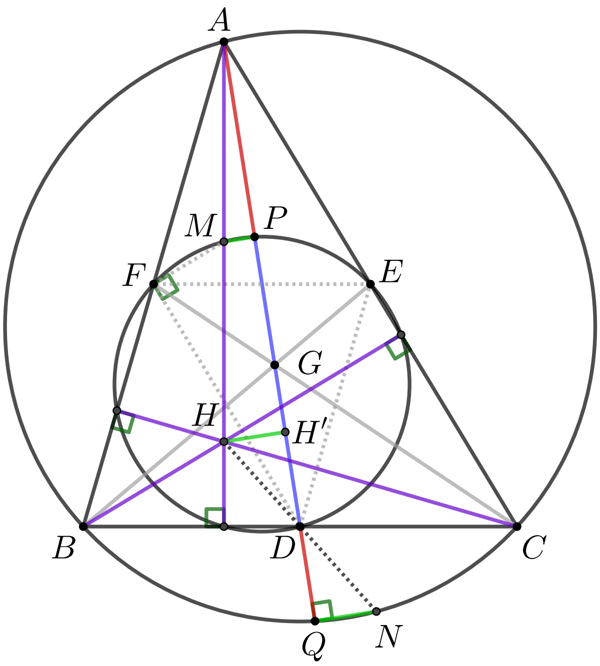
Stanley Rabinowitz

The problem has been posted on facebook, within the group Romantics of Geometry. The first two solutions are also taken from there.

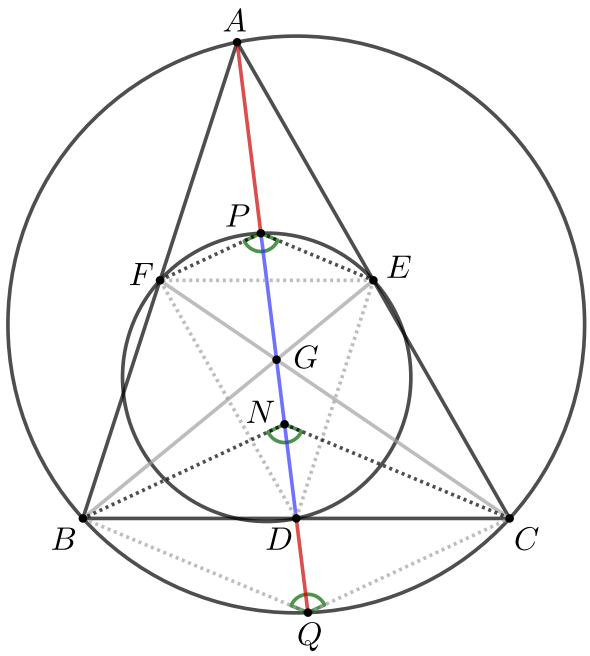


Solution 1: (*Rajarshi Chakraborty*)
Let G be the center of gravity of triangle ABC. The inverse homothety of center G and ratio 2 maps D to A, E to B, F to C, hence triangle DEF to triangle ABC. It also maps the circumcircle of DEF into the circumcircle of ABC and ray $(GD$ into ray $(GA$, hance it maps P to Q and $[DP]$ to $[AQ]$. It follows that $AQ = 2DP$, and the conclusion is immediate.

Solution 2: (*Radosław Żak*)
Let H be the orthocenter of triangle ABC, and let H' be the projection of H onto AD. Also, consider M the midpoint of $[AH]$ and N the reflection of H across D.
It is well known that M lies on the circumcircle of DEF (*the 9 point circle*: M is one of the 9 points), and, moreover, M is diametrically opposed to D in this circle. Then $MP \parallel HH'$ (both perpendicular on AD), hence $AP = PH'$ (1).
It is well known that N lies on the circumcircle of ABC and that N is diametrically opposed to A in this circle. Thus, $AQ \perp QN$ and $HH' \perp AQ$ imply $HH' \parallel QN$, while $HD = DN$ implies that $H'D = DQ$ (2).
From (1) and (2) we get the conclusion.



Solution 3: (*Titu Zvonaru*)
Let N be the reflection of A across P and let Q' be the reflection of N across D. Quadrilaterals $AFDE$ and $BQ'CN$ are parallelograms, while quadrilateral $DEPF$ is cyclic. Therefore, $\sphericalangle BQ'C = \sphericalangle BNC = \sphericalangle FPE = 180° - \sphericalangle FDE = 180° - \sphericalangle BAC$. It follows that point Q' is on the circumcircle of triangle ABC, which means that points Q and Q' coincide. It follows that $AP + DQ = PN + ND = PD$.



Solution 4: (*Emanuel Mazăre*)
Let $\{M\} = AD \cap EF$. As $AFDE$ and $BDEF$ are parallelograms, and quadrilaterals $ABQC$ and $PFDE$ are cyclic, we have $\sphericalangle FPM = \sphericalangle FED = \sphericalangle FBD = \sphericalangle DQC$ and $\sphericalangle FMP = \sphericalangle BDP = \sphericalangle CDQ$, therefore triangles PMF and QDC are similar. It follows that $\dfrac{PM}{QD} = \dfrac{FM}{CD} = \dfrac{1}{2}$, hence $QD = 2PM$. Thus, $AP + QD = AM - PM + 2PM = AM + PM = MD + PM = PD$.