Problema săptămânii 296

Pentru orice număr natural n mai mare ca 1 notăm T_n numărul submulţimilor nevide S ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea că media aritmetică a elementelor lui S este un număr întreg. Demonstraţi că $T_n - n$ este întotdeauna un număr par.

Concursrul Putnam, 2002

Soluţie: Printre submulţimile nevide ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ care au proprietatea că media aritmetică a elementelor lor este număr natural se află şi singletoanele $\{1\}$, $\{2\}$, ... , $\{n\}$. Celelalte submulţimi care au această proprietate pot fi grupate în perechi de forma $(A,\ A \cup \{m\})$, unde A este o submulţime care nu-şi conţine media aritmetică m. Aceste perechi sunt disjuncte şi conţin toate submulţimile cu cel puţin două elemente care îşi conţin media aritmetică. Aşadar, $T_n = n + 2\times$ numărul perechilor, deci $T_n - n$ este număr par.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 296

Let n be an integer greater than 1 and let T_n be the number of non empty subsets S of $\{1, 2, \ldots, n\}$ with the property that the average of the elements of S is an integer. Prove that $T_n - n$ is always even.

Putnam, 2002

Solution: Among the non-empty subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ whose average is an integer are the singletons $\{1\}$, $\{2\}$, ... , $\{n\}$. The other subsets that have this property can be paired up as follows: a subset A that not contain its average is paired up with $A \cup \{a\}$, where a is its average. The pairs $(A,\ A \cup \{a\})$ are disjoint and contain all the subsets whose average is an integer, with the exception of the singletons. There are n singletons, therefore, as we have grouped the remaining subsets into pairs, $T - n - n$ is an even number.

There is another solution, see post #12 on AoPS.