

Problema săptămânii 295

Determinați toate pătratele perfecte care în scrierea lor în baza 10 au o cifră de 6 și în rest numai cifre de 1.

Titu Andreescu și Marian Tetiva, MR nr. 5/2021

Soluție:

Evident, numerele căutate trebuie să aibă cel puțin două cifre. Vom distinge trei cazuri în funcție de ultimele două cifre ale numărului.

- Dacă ultimele două cifre sunt 11, numărul este congruent cu 3 modulo 4, deci nu poate fi pătrat perfect.

- Dacă ultimele două cifre sunt 16 și numărul are cel puțin 4 cifre, ultimele 4 cifre vor fi 1116, deci numărul va fi de forma $16k + 1116$. Fiind par, dacă este pătrat perfect, el este de forma $4m^2$, unde $m^2 = 4k + 299 \equiv 3 \pmod{4}$, contradicție. Mai avem de verificat numerele 16 și 116. Numai primul este pătrat perfect.

- Dacă ultimele două cifre sunt 61, examinăm divizibilitatea cu 11.

Mai întâi, analizând resturile modulo 11 ale unui pătrat perfect constatăm că acesta poate fi 0, 1, 4, 9, 5 sau 3.

Pe de altă parte, dacă numărul nostru are un număr par de cifre, atunci $11 \dots 161 = 11 \dots 100 + 61 \equiv 61 \equiv 6 \pmod{11}$, iar dacă are un număr impar de cifre, $11 \dots 1161 = 11 \dots 100 + 161 \equiv 161 \equiv 7 \pmod{11}$. Așadar, indiferent de paritatea numărului de cifre, un asemenea număr nu este pătrat perfect.

Concluzionăm că singurul număr cu proprietatea din enunț este 16.

Puteți citi și soluția din *Mathematical Reflections*, la pagina 16.

Am primit soluții de la: *Andrei Pană, Radu Stoleriu, David Ghibu, Victor Vasile Dragoș, Aida Mitroi, Ștefan Gobej și Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 295

Find all perfect squares written in base 10 with one digit of 6, and n digits of 1, for some positive integer n .

Titu Andreescu and Marian Tetiva, MR no. 5/2021

A solution in English can be read on page 16: *Mathematical Reflections*.