Problema săptămânii 294

Numerele reale pozitive a, b, c, d verifică egalitatea $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Demonstraţi inegalitatea

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd.$$

Vasile Cârtoaje, Concursul anual al rezolvitorilor GM, 2001

Soluţie: (*David Ghibu, Denis Nica, Radu Stoleriu, Ştefan Gobej*)
Avem $1-a^2-b^2=c^2+d^2 \geq 2cd$ şi atunci $(1-a)(1-b)-cd \geq (1-a)(1-b)-\frac{1-a^2-b^2}{2}=\frac{(1-a-b)^2}{2} \geq 0$, deci $(1-a)(1-b) \geq cd$.
Analog, $(1-c)(1-d) \geq ab$. Înmulţind aceste două relaţii obţinem inegalitatea din enunţ.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Remarcă: (*Titu Zvonaru*)
Inegalitatea rămâne adevărată şi fără condiţia $a, b, c, d > 0$:
Avem $(1-a)(1-b) \geq \frac{1}{2}(1-a^2-b^2) \geq 0$, inegalitate care revine la $(1-a-b)^2 \geq 0$.
Atunci $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq \frac{1}{4}(1-a^2-b^2)(1-c^2-d^2)=\frac{1}{4}(c^2+d^2)(a^2+b^2) \geq |cd| \cdot |ab| \geq abcd$.
Egalitatea are loc atunci când fie avem egalitate în ambele inegalităţi înmulţite, fie când una dintre ele devine inegalitatea $0 \geq 0$. Aşadar, avem egalitate când $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ precum şi atunci când trei dintre numere sunt egale cu 0 şi unul dintre ele este 1.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Denis Nica, Radu Stoleriu, Aida Mitroi, Emanuel Mazăre* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 294

Positive real numbers a, b, c, d satisfy $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Prove that

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd.$$

Vasile Cârtoaje

Solution: (*David Ghibu, Denis Nica, Radu Stoleriu, Ştefan Gobej*)
We have $1-a^2-b^2=c^2+d^2 \geq 2cd$ and $(1-a)(1-b)-cd \geq (1-a)(1-b)-\frac{1-a^2-b^2}{2}=\frac{(1-a-b)^2}{2} \geq 0$, hence $(1-a)(1-b) \geq cd$.

Similarly, $(1-c)(1-d) \geq ab$. Multiplying these two inequalities leads to the conclusion.
Equality holds only for $a = b = c = d = \dfrac{1}{2}$.

Remark: (*Titu Zvonaru*)
The inequality stays true even without the condition $a, b, c, d > 0$.
Indeed, we have $(1-a)(1-b) \geq \dfrac{1}{2}(1-a^2-b^2) \geq 0$ reduces to $(1-a-b)^2 \geq 0$. Then $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq \dfrac{1}{4}(1-a^2-b^2)(1-c^2-d^2) = \dfrac{1}{4}(c^2+d^2)(a^2+b^2) \geq |cd| \cdot |ab| \geq abcd$.
Equality holds either when we have equality in both the inequalities we have multiplied, or when one of them reduces to $0 \geq 0$. Thus, we have equality when $a = b = c = d = \dfrac{1}{2}$ but also when three of the numbers are equal to 0 and the fourth one is 1.